

Mathe für Studienkolleg

Inhaltsverzeichnis

1 Rechnen mit Termen	2
1.1 Übungen	2
1.2 Lösungen	3
2 Faktorisieren (Ausklammern)	3
2.1 Übungen	3
2.2 Lösung	5
3 Binomische Formeln	6
3.1 Übungen	6
3.2 Lösung	7
4 Bruchrechnung	10
4.1 Übungen	10
4.2 Lösung	11
5 Potenzen	14
5.1 Übungen	14
5.2 Lösung	16
6 Wurzelrechnung	18
6.1 Übungen	18
6.2 Lösung	20
7 Logarithmen	23
7.1 Übungen	23
7.2 Lösung	24
8 Polynomdivision	27

9 Mengenlehre	27
9.1 Übungen	27
9.2 Lösung	29
10 Zahlenmengen	31
10.1 Übungen	31
10.2 Lösung	32
11 Lineare Gleichungen	34
11.1 Übungen	34
11.2 Lösung	35
12 Betragsgleichungen	40
12.1 Übungen	40
12.2 Lösung	42
13 Lineare Gleichungssysteme	47
13.1 Übungen	47
13.2 Lösung	50
14 Textaufgaben	56
14.1 Übungen	56
14.2 Lösung	57
15 Quadratische Gleichungen	59
15.1 Übungen	59
15.2 Lösung	60
16 Polynomgleichungen	67

17 Exponentialgleichungen	67
17.1 Übungen	67
17.2 Lösung	68
18 Logarithmusgleichungen	76
18.1 Übungen	76
18.2 Lösung	78
19 Ungleichungen	85
19.1 Übungen	85
19.2 Lösung	87
20 Betragsgleichungen	92
20.1 Übungen	92
20.2 Lösung	94
21 Lineare Funktionen	100
21.1 Übungen	100
21.2 Lösung	102
22 Quadratische Funktionen	106
22.1 Übungen	106
22.2 Lösung	107
23 Potenzfunktionen	109
23.1 Übungen	109
23.2 Lösung	110
24 Exponential-/Logarithmusfunktionen	112
24.1 Übungen	112

25.1 Trigonometrische Funktionen.	117
25.1 Übungen	117
26 Vektoren	120
26.1 Übungen	120
26.2 Lösung	121
27 Flächen und Umfänge	124
27.1 Übungen	124
28 Körper und Figuren	128
28.1 Übungen	128
28.2 Lösung	133
29 Ableitungen	139
29.1 Übungen	139
29.2 Lösung	141
30 Integralrechnung	146
30.1 Übungen	146
30.2 Lösung	148

1 Rechnen mit Termen

1.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Aufgabe 1.

$$6ab + 35a + 73b = 6b + 5ab + 7a$$

Aufgabe 2.

$$h(3c + 4ac) = 15abc - 44bc$$

Aufgabe 3.

$$37a + 34ab - 3 = 47a - 15$$

Aufgabe 4.

$$15a(24k - 21n) = 18ak + 2a + 4an$$

Aufgabe 5.

$$5n(18bc + 4k) = 47kn - 4n$$

Aufgabe 6.

$$(x - y)(5b + c) + (x - y)(6b - c)$$

Aufgabe 7.

$$(f + 5a)(c - 4) + (6a - 3f)(-c)$$

Aufgabe 8.

$$(a + 3c) + 47(3c + a)(67.4c)$$

Aufgabe 9.

$$2.3(c + 2ab + ac) = 5ab - 1.3c$$

Aufgabe 10.

$$47k + 44r - (k + 5.3r + kr)$$

Aufgabe 11.

$$3k(k + \frac{1}{3}k + 47 = 45k(\frac{1}{3}c + 3)$$

Aufgabe 12.

$$\frac{1}{2}b(2b + 4a) = 5.5(2b + ab)$$

Aufgabe 13.

$$(f + n)(5.7c - 4.3c^2) - (f + n)(5.7c - 4.3c^2)$$

Aufgabe 14.

$$2.8x(4.7y + 7.3x - 5) = -1.3x$$

Aufgabe 15.

$$7.5(f + u) + 47uf = 3(u + f)$$

1.2 Lösungen

2 Faktorisieren (Ausklammern)

2.1 Übungen

Beispiel:

$$18ab - 36ac = 18a(b - 2c)$$

Aufgabe 1.

$$21mnx - 6ny + 15nz =$$

Aufgabe 2.

$$3m^3 + 6mn^2 - m^2n =$$

Aufgabe 3.

$$myn\dot{d} - mny\dot{c} + m\dot{b}n\dot{d} - m\dot{b}n\dot{c} =$$

Aufgabe 4.

$$ax + ay - bx - by =$$

Aufgabe 5.

$$-10xy^2z + 42xy^2z - 28x^2yz =$$

Aufgabe 6.

$$-x - y + z =$$

Aufgabe 7.

$$(y - z) \cdot a + y - z$$

Aufgabe 8.

$$h \cdot (a + b) \cdot k - a - b =$$

Aufgabe 9.

$$y \cdot (a - b) + (a + b) \cdot y =$$

Aufgabe 10.

$$(c + 5s) \cdot 4b - c - 5s =$$

Aufgabe 11.

$$(x - y) \cdot (5a + 2b) + (x - y) \cdot (3a + 2b) =$$

Aufgabe 12.

$$3bc - 3bt + cx^2y - tx^2y + 4at - 4ac =$$

Aufgabe 13.

$$mb + mc + 2ma - nc - nb - 2na =$$

Aufgabe 14.

$$6 \cdot (3a - 5b) - (3a - 5b) \cdot (5 - 3x) - 2 \cdot (3a - 5b) \cdot x =$$

Aufgabe 15.

$$(3u + r) \cdot 2h - (2h + 3) \cdot (3a + r) - 3a - r =$$

2.2 Lösung

Aufgabe 1.

$$21mnx - 6ny + 15nz = 3n(7mx - 2y + 5z)$$

Aufgabe 2.

$$3m^3 + 6mn^2 - m^2n = m(3m^2 + 6n^2 - mn)$$

Aufgabe 3.

$$mynd - myc + mbrd - mbnc = mn(d - c)(y + b)$$

Aufgabe 4.

$$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$$

Aufgabe 5.

$$-30xy^2z + 42xy^2z^2 - 28x^2yz = -2xyz(15y - 21z + 14x)$$

Aufgabe 6.

$$-x - y + z = -(x + y - z)$$

Aufgabe 7.

$$(y - z) \cdot a + y - z = (y - z)(a + 1)$$

Aufgabe 8.

$$h \cdot (a + b) \cdot k - a - b = (hk - 1)(a + b)$$

Aufgabe 9.

$$y \cdot (a - b) + (a + b) \cdot y = 2ay$$

Aufgabe 10.

$$(c + 5s) \cdot 4b - c - 5s = (c + 5s)(4b - 1)$$

Aufgabe 11.

$$(x - y) \cdot (5a + 2b) + (x - y) \cdot (3a + 2b) = 4(x - y)(2a + b)$$

Aufgabe 12.

$$3bc - 3bt + cx^2y - tx^2y + 4at - 4ac = (c - t)(3b + x^2y - 4a)$$

Aufgabe 13.

$$mb + mc + 2ma - nc - nb - 2na = (m - n)(2a + b + c)$$

Aufgabe 14.

$$6 \cdot (3a - 5b) - (3a - 5b) \cdot (5 - 3x) - 2 \cdot (3a - 5b) \cdot x = (3a - 5b)(1 + x)$$

Aufgabe 15.

$$(3a + r) \cdot 2h - (2h + 3) \cdot (3a + r) - 3a - r = -4(3a + r)$$

3 Binomische Formeln

3.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$(1 + 2x^2)^2$$

Aufgabe 2.

$$(4b + 6a)^2$$

Aufgabe 3.

$$(7f + 8k)(8k - 7f)$$

Aufgabe 4.

$$144 - 9c^2$$

Aufgabe 5.

$$36b^2 + 1 + 12b$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(k^2y + ky^2)(k^2y - ky^2)$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{5}{2}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2$$

Aufgabe 3.

$$(4a^2 - \frac{1}{2}b^3)^2$$

Aufgabe 4.

$$(6x^2 + 0,1)^2$$

Aufgabe 5.

$$(8f^4 + 7m)(7m - 8f^4)$$

Level C

Aufgabe 1.

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2 - 7ab^2)$$

Aufgabe 2.

$$(a^7 + \frac{7}{6}ax^4)^2$$

Aufgabe 3.

$$\left(\frac{3}{4}m^3f^4 - m^5\right)^2$$

Aufgabe 4.

$$(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^3)^2$$

Aufgabe 5.

$$\left(\frac{1}{4}x^{n-2}y^4 + x^{n+2}y\right)^2$$

3.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$(1 + 2x^2)^2$$

Lösung:

$$(1 + 2x^2)^2 = 1 + 4x^2 + 4x^4$$

Aufgabe 2.

$$(1b + 6a)^2$$

Lösung:

$$(1b + 6a)^2 = 16b^2 + 24ab + 36a^2$$

Aufgabe 3.

$$(7f + 8k)(8k - 7f)$$

Lösung:

$$(8k + 7f)(8k - 7f) = 64k^2 - 49f^2$$

Aufgabe 4.

$$144 - 9c^2$$

Lösung:

$$144 - 9c^2 = (12 + 3c)(12 - 3c)$$

Aufgabe 5.

$$36b^2 + 1 + 12b$$

Lösung:

$$36b^2 + 1 + 12b = (6b + 1)^2$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(k^3y + ky^2)(k^2y - ky^2)$$

Lösung:

$$(k^3y + ky^2)(k^2y - ky^2) = k^4y^2 - k^2y^4$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{5}{3}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2$$

Lösung:

$$\left(\frac{5}{3}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2 = \frac{25}{9}m^2n^2 + \frac{20}{3}m^3n + \frac{4}{9}m^4$$

Aufgabe 3.

$$(4a^2 - \frac{1}{2}b^3)^2$$

Lösung:

$$(4a^2 - \frac{1}{2}b^3)^2 = 16a^4 - 4a^2b^3 + \frac{1}{4}b^6$$

Aufgabe 4.

$$(6x^2 + 0,1)^2$$

Lösung:

$$(6x^2 + 0,1)^2 = 36x^4 + 0,3x^2 + 0,01$$

Aufgabe 5.

$$(8f^4 + 7m)(7m - 8f^4)$$

Lösung:

$$(7m + 8f^4)(7m - 8f^4) = 49m^2 - 64f^8$$

Level C

Aufgabe 1.

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2b - 7ab^2)$$

Lösung:

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2b - 7ab^2) = 16a^4b^2 - 49a^2b^4$$

Aufgabe 2.

$$(a^7 + \frac{7}{8}ax^4)^2$$

Lösung:

$$(a^7 + \frac{7}{8}ax^4)^2 = a^{14} + \frac{7}{4}a^8x^4 + \frac{49}{64}a^2x^8$$

Aufgabe 3.

$$(\frac{3}{4}m^3f^4 - m^5)^2$$

Lösung:

$$(\frac{1}{3}m^3f^4 - m^5)^2 = \frac{1}{9}m^6f^8 - \frac{2}{3}m^8f^4 + m^{10}$$

Aufgabe 4.

$$(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^3)^2$$

Lösung:

$$(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^3)^2 = b^{2n+2} - \frac{2}{3}b^{2n}a^3 + \frac{1}{9}b^{2n-2}a^{10}$$

Aufgabe 5.

$$(\frac{1}{3}x^{n+2}y^4 + x^{n+2})^2$$

Lösung:

$$(\frac{1}{3}x^{n+2}y^4 + x^{n+2})^2 = \frac{1}{9}x^{2n+4}y^8 + \frac{2}{3}x^{2n+4}y^4 + x^{2n+4}$$

4 Bruchrechnung

4.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{4b}{5} + \frac{12}{3-x}\right) \cdot \frac{x^2}{4}$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{b}{b+c} + \frac{c^2}{c-b}\right) \cdot \frac{b^2}{b+c}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{3m-2n}{n} \cdot \frac{3n^2}{m^2-n^2}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{10^4 \cdot 10^2}{10^3} \cdot \frac{u}{3u+5u}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{3k-7}{0} - \frac{4k-1}{0}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{x^2-xy}\right) \cdot \frac{x}{y-x}$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a}\right) \cdot \frac{x^2-b^2}{2b}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{(x+3)^2}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{16-8a+2^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{4-m^2}{10+5m} \cdot \frac{m^2-25}{m^2-4m+4}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\left(f - \frac{6f-4}{f+2}\right) \cdot \frac{f+2}{f-2f}$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-8}{c^2-3c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) \cdot \frac{c}{2c-3}$$

Aufgabe 3.

$$\left(\frac{2}{x-2} + \frac{3x-21}{x^2+x-6} + \frac{2x}{x+3}\right) \cdot \frac{x}{2x-5}$$

Aufgabe 4.

$$\left(\frac{y}{y^2-2y+1} - \frac{y+2}{y+y-2}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2}$$

Aufgabe 5.

$$\left(\frac{x+2}{x^2-x-6} - \frac{x}{x^2-6x+9}\right) \cdot (2x-6)^2$$

4.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{M}{x-3} + \frac{12}{3-x}\right) \cdot \frac{x^2}{4}$$

Lösung:

$$\left(\frac{M}{x-3} + \frac{12}{3-x}\right) \cdot \frac{x^2}{4} = \left(\frac{4x}{x-3} - \frac{12}{x-3}\right) \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{4x-12}{x-3} \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{4(x-3)}{(x-3)} \cdot \frac{x^2}{4} = x^2$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-b}\right) \cdot \frac{b^2}{y+c}$$

Lösung:

$$\left(\frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-b}\right) \cdot \frac{b^2}{y+c} = \frac{b^2-c^2}{b-c} \cdot \frac{b^2}{y+c} = \frac{(b-c)(b+c)}{b-c} \cdot \frac{b^2}{y+c} = b^2$$

Aufgabe 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} \cdot \frac{3n^2}{m^2-n^2}$$

Lösung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n \cdot n)}{n} \cdot \frac{3n^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3n}{(m+n)} = \frac{6n}{m+n}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}}{10b^2} \cdot \frac{b}{3a+3a}$$

Lösung:

$$\frac{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}}{10b^2} \cdot \frac{b}{3(a+b)} = \frac{b+12}{15b}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{3k-7}{9} - \frac{4k-1}{6}$$

Lösung:

$$\frac{3(3k-7) - 3(4k-1)}{18} = \frac{9k-21-12k+3}{18} = \frac{-3k-18}{18}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{y^2}{y^2-xy} - \frac{y}{y^2-xy}\right) \cdot \frac{x}{y-x}$$

Lösung:

$$\frac{y^2-y}{y^2-xy} \cdot \frac{x}{y-x} = \frac{y(y-x)}{y(y-x)} \cdot \frac{x}{y-x} = \frac{y}{y-x}$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{ab}{c^2} + \frac{b}{2b-2a}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b}$$

Lösung:

$$\left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)} + \frac{b}{2b-2a}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} = \left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{2(a-b)}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} = \left(\frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} = \frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)} * \frac{a^2-b^2}{2b} = \frac{2ab-ba-b^2}{2(a-b)} * \frac{a^2-b^2}{2b} = \frac{ab-b^2}{2(a-b)} * \frac{a^2-b^2}{2b} = \frac{b(a-b)}{2(a-b)} * \frac{a^2-b^2}{2b} = \frac{a^2-b^2}{2b}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{(x+3)^2}{2x-4} * \frac{x^2-4}{3x+9}$$

Lösung:

$$\frac{(x+3)^2}{2(x-2)} * \frac{(x-2)(x+2)}{3} = \frac{(x+3)(x+2)}{6} = \frac{x^2+5x+6}{6}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{16-8a+a^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8} : \frac{a^2-16}{2a+8}$$

Lösung:

$$\frac{16-8a+a^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8} = \frac{(4-a)^2}{32} * \frac{2(a+4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{-(4-a)^2}{16(a-4)} = -\frac{4-a}{16}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{4-m^2}{10+5m} * \frac{m^2-4m+4}{m^2-4m+4}$$

Lösung:

$$\frac{2^2-m^2}{5(2+m)} * \frac{25}{(m-2)^2} = \frac{(2-m)(2+m)}{5(2+m)} * \frac{5}{(m-2)^2} = -\frac{(m-2)*5}{(m-2)^2} = -\frac{5}{m-2} = \frac{5}{2-m}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\left(f - \frac{6f-4}{f+4}\right) * \frac{f+2}{f-2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{f(f+2)}{f+4} - \frac{6f-4}{f+4}\right) * \frac{f+2}{f-2} = \left(\frac{f^2+2f-6f+4}{f+4}\right) * \frac{f+2}{f-2} = \frac{f^2-4f+4}{f+4} * \frac{f+2}{f-2} = \frac{(f-2)^2}{f} = \frac{f-2}{f}$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{c^2-3c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3}$$

Lösung:

$$\left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{c^2-3c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3} = \left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{(c+1)(c-4)} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3} = \frac{3(c+1)+4c-6+2c(c-4)}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} =$$

$$\frac{3(c+1)+4c-6+2c(c-4)}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} = \frac{2c^2-c-3}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} = \frac{c}{(c+1)(c-4)} = \frac{c}{c-4}$$

Aufgabe 3.

$$\left(\frac{1}{x-3} + \frac{3x-21}{x^2+x-6} + \frac{2x}{x+3}\right) * \frac{x}{2x-5}$$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{x-3} + \frac{3x-21}{(x+3)(x-2)} + \frac{2x}{x+3}\right) * \frac{x}{2x-5} = \frac{2(x+3)+3x-21+2x(x-2)}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \frac{2x+6+3x-21+2x^2-4x}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \frac{2x^2-4x-15}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \frac{x(2x^2-4x-15)}{(x+3)(x-2)(2x-5)} = \frac{x}{x-2}$$

Aufgabe 4.

$$\left(y^{\frac{y}{y-2}+1} - \frac{y+2}{y^2+y-2}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{y}{(y-1)^2} - \frac{y+2}{(y+2)(y-1)}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2} = \frac{y-(y-1)}{(y-1)^2} * \frac{4(y-1)^2}{1} = 4(y-y+1) = 4$$

Aufgabe 5.

$$\left(\frac{y^{y+2}}{y^2-6} - \frac{y}{y^2-6y+9}\right) * (2r-6)^2$$

Lösung:

$$\left(\frac{y^{y+2}}{(y-3)(y+3)} - \frac{y}{(r-3)^2}\right) * (2r-6)^2 = \frac{y^{y+2}}{(r-3)^2} - \frac{y}{(r-3)^2} * (2r-6)^2 = \frac{y^{y+2}}{(r-3)^2} - \frac{4(r-3)^2}{1} = 4 * (-3) = -12$$

5. Potenzen

5.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$a^{-3} * a^4 : (-a)^{-5}$$

Aufgabe 2.

$$m^{-3,5} : (m^4)^{3,5} * m^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3.

Level B

Aufgabe 1.

$$(b^3b^{-4} + b^{-8}) : b^{-3} - (b^{-1} - 1)^2$$

Lösung:

$$\left(\frac{b^{-5}}{b^{-3}} + \frac{b^{-4}}{b^{-3}} + \frac{b^{-8}}{b^{-3}}\right) - ((b^{-1})^2 - 2b^{-1} + 1^2) = (b^{-2} + b^{-1} + 1) - (b^{-2} - 2b^{-1} + 1) = b^{-2} + b^{-1} + 1 - b^{-2} + 2b^{-1} - 1 = 3b^{-1} = \frac{3}{b}$$

Aufgabe 2.

$$\frac{y^{-8} + y^{-6} + y^{-4}}{y^4 + y^2 + y^0}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{1}{y^8} + \frac{1}{y^6} + \frac{1}{y^4}}{\frac{y^4}{y^4} + \frac{y^2}{y^4} + \frac{y^0}{y^4}} = \frac{\frac{1+y^2+y^4}{y^8}}{\frac{1+y^2+y^4}{y^4}} = \frac{1}{y^4} = y^{-4}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{n^{-2} - m^{-2}}{n^{-1} + m^{-1}} : \frac{n^{-1} + m^{-1}}{(m-n)^{-1}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) = \frac{m-n}{mn} = \frac{(m-n)}{mn} * \frac{(m-n)}{(m-n)} = 1$$

Aufgabe 4.

$$\frac{f^{-2} + f^{-1} - u^{-1} + u^{-2}}{f^{-3} - u^{-3}} : \frac{(u-f)^{-1}}{(f u)^{-2}}$$

Lösung:

$$\frac{(f^{-2} + f^{-1} - u^{-1} + u^{-2})}{(f^{-3} - u^{-3})} * \frac{(f u)^{-2}}{(u-f)^{-1}} = \frac{1}{f - \frac{1}{u}} * \frac{u f^2}{f u^2} = \frac{1}{\frac{f u}{u}} * \frac{u f^2}{f u^2} = \frac{f u}{f u^2} = \frac{1}{u}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^9 + a^7 + a^5}$$

Lösung:

$$\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^9 + a^7 + a^5} = \frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^5(a^4 + a^2 + a^0)} = \frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^5(1 + a^2 + a^4)} * a^0 = a^5 * a^0 = a^5$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\frac{x^3 y^{-1}}{x y^{-1} + x^{-1} y} * \left(\frac{x^2 - y^2}{x y}\right)^{-1}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}}{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}} * \frac{x y}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{x y}}{\frac{x^2 - y^2}{x y}} * \frac{x y}{x^2 - y^2} = \frac{(x^3 - y^3) \frac{x y}{x y}}{(x^2 - y^2) \frac{x y}{x y}} = \frac{(x^3 - y^3)(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = x y$$

Aufgabe 2.

$$\frac{(m-3-m^{-3})^{-1} (m^{-2} + a^{-2})}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Lösung:

$$\frac{(m^{-3} - m^{-3})^{-1} * (\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})}{(\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2})^{-1}} = \frac{(m^{-2} - n^{-2})(m^2 + n^2)}{\frac{m^4 - n^4}{m^2 n^2}} = \frac{m^{-4} n^{-4}}{m^2 - n^2} * n^2 m^2 = n^2 m^2$$

Aufgabe 3.

$$(2c^{-2} + 3k^{-3}) \left(\frac{c^{-2}}{2} - \frac{3}{k^3}\right) \left(\frac{4}{c^4} + \frac{k^{-6}}{3}\right)$$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{c^2} + \frac{3}{k^3}\right) * \left(\frac{c^2}{2} - \frac{3}{k^3}\right) * \left(\frac{4}{c^4} + \frac{k^{-6}}{3}\right) = \left(\frac{4}{c^4} - \frac{9}{k^6}\right) \left(\frac{4}{c^4} + \frac{9}{k^6}\right)$$

Aufgabe 4.

$$\frac{(a^3 b^{-1})^{\frac{1}{2}} (a^{-1} b^2)^{\frac{1}{2}}}{(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} (a^{-1} b)^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung:

$$\frac{\left(\frac{a^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^{-1}}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^{-1}}{b}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{a^{\frac{3}{2}} a^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} b}}{\frac{a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} b}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)} = a + b$$

Aufgabe 5.

$$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v} + \frac{1}{u} - \frac{1}{v}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v} + \frac{1}{u} - \frac{1}{v}} = \frac{0}{0} = \frac{(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}})(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}})}{(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}})(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}})} = u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}$$

6 Wurzelrechnung

6.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$5\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

Aufgabe 2.

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + \sqrt{12})$$

Aufgabe 3.

$$(\sqrt{6} - 3)^2$$

Aufgabe 4.

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

Aufgabe 5.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 2\sqrt{5} + \sqrt{7} * \sqrt{5 - \sqrt{7}} + (\sqrt{5 - \sqrt{7}})^2$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 + \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a}}$$

Aufgabe 2.

$$\frac{b-18}{\sqrt{b+3}\sqrt{2}}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{k-l}{\sqrt{k-l}} - \sqrt{l}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{b\sqrt{b}+u\sqrt{u}}{b-\sqrt{b}+u}$$

Aufgabe 5.

$$\sqrt{a} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m}$$

Aufgabe 2.

$$\sqrt{a} : \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{a-b}\right)$$

Aufgabe 3.

$$\frac{x\sqrt{x+5}\sqrt{5}}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2+\sqrt{5x}} * (\sqrt{x}-\sqrt{5})$$

Aufgabe 4.

$$\left(\frac{5x\sqrt{c^2-k^2}-k^2}{c+\sqrt{c^2-k^2}} - \frac{5k\sqrt{c^2-k^2}}{c-\sqrt{c^2-k^2}}\right) : \frac{4\sqrt{c^2-k^2}}{(5k)^2}$$

Aufgabe 5.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) : (\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})$$

6.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$5\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

Lösung:

$$5\sqrt{2} + \sqrt{16*2} - \sqrt{9*2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Aufgabe 2.

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + \sqrt{12})$$

Lösung:

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} * 5\sqrt{3} = 15$$

Aufgabe 3.

$$(\sqrt{6} - 3)^2$$

Lösung:

$$(\sqrt{6})^2 - 2 * 3\sqrt{6} + 9 = 6 - 6\sqrt{6} + 9 = 15 - 6\sqrt{6}$$

Aufgabe 4.

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

Lösung:

$$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

Aufgabe 5.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 2\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + (\sqrt{5} - \sqrt{7})^2$$

Lösung:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 2\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + (\sqrt{5} - \sqrt{7})^2 = 5 + \sqrt{7} - 2\sqrt{18} + 5 - \sqrt{7} =$$

$$10 - 2 \cdot 3\sqrt{2} = 10 - 6\sqrt{2}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 \cdot 4\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a}}$$

Lösung:

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 \cdot 4\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^{3+1}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{4}{9}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} = a^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{a^1}$$

Aufgabe 2.

$$\frac{b-18}{\sqrt{b+3}\sqrt{2}}$$

Lösung:

$$\frac{b-18}{\sqrt{b+3}\sqrt{2}} = \frac{b-18}{\sqrt{b+3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{b+3} - \sqrt{18})^2}{\sqrt{b+3}} = \frac{(\sqrt{b+3} - \sqrt{18})(\sqrt{b+3} + \sqrt{18})}{(\sqrt{b+3} + \sqrt{18})} = \sqrt{b} - \sqrt{18}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{k-1}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} - \sqrt{f}$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{f})^2 - \sqrt{f}}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} = \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{f})(\sqrt{k}+\sqrt{f}) - \sqrt{f}}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} = \sqrt{k} + \sqrt{f} - \sqrt{f} = \sqrt{k}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{b\sqrt{b+u}\sqrt{u}}{b\sqrt{b+u}+u}$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{b})^2}{b\sqrt{b+u}+u} = \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{u})(\sqrt{b}^3 - \sqrt{b}u + \sqrt{u}^3)}{b\sqrt{b+u}+u} = \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{u})(b\sqrt{b} - \sqrt{b}u + u)}{(b\sqrt{b+u}+u)} = \sqrt{b} + \sqrt{u}$$

Aufgabe 5.

$$\sqrt{a} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Lösung:

$$\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m}$$

Lösung:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m} = \left(\frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{n-m}{\sqrt{m}} = \left(\frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{n-m}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{a}}{m-n} \cdot \frac{n-m}{\sqrt{m}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{m}}$$

Aufgabe 2.

$$\sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{a-b}\right)$$

Lösung:

$$\sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}\right) = \sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{x\sqrt{x+5}\sqrt{5}}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2 + \sqrt{5x}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{5})$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{5})^2}{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{5x} + (\sqrt{5})^2 + \sqrt{5x}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{5}) = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{5})(\sqrt{x}-\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2 + \sqrt{5x}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{5}) = (\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} - \sqrt{5}) = x - 5$$

Aufgabe 4.

$$\left(\frac{c-\sqrt{c^2-k^2}}{c+\sqrt{c^2-k^2}} - \frac{c+\sqrt{c^2-k^2}}{c-\sqrt{c^2-k^2}}\right) : \frac{4\sqrt{c^2-k^2}}{(3k)^2}$$

Lösung:

$$\frac{(c-\sqrt{c^2-k^2})(c+\sqrt{c^2-k^2}) - (c+\sqrt{c^2-k^2})(c-\sqrt{c^2-k^2})}{(c+\sqrt{c^2-k^2})(c-\sqrt{c^2-k^2})} \cdot \frac{(3k)^2}{4\sqrt{c^2-k^2}} = \frac{c^2 - c^2 + k^2 - c^2 + c^2 - k^2}{c^2 - c^2 + k^2} \cdot \frac{(3k)^2}{4\sqrt{c^2-k^2}} = \frac{0}{c^2 - c^2 + k^2} \cdot \frac{(3k)^2}{4\sqrt{c^2-k^2}} = 0$$

Aufgabe 5.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) : \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

Lösung:

$$\frac{1}{x-y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{x^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + y^2 + 2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{x^2 + y^2 + 2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{(x+y)^2}{x-y}$$

7 Logarithmen

7.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$\log_2 16 \log_2 2$$

Aufgabe 2.

$$\log_3 324 - \log_3 4$$

Aufgabe 3.

$$2 \log_5 25$$

Aufgabe 4.

$$2 \cdot 5^{\log_2 56} - 3$$

Aufgabe 5.

$$\log_3 3$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\log_3 \frac{1}{125}$$

Aufgabe 2.

$$4 \frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_8 5$$

Aufgabe 3.

$$\log_4 \sqrt{6} + 2 \log_6 \sqrt{6}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{\log_2 44 \log_2 \sqrt{11}}{\log_2 10} + 2 \log_2 2$$

Level C

Aufgabe 1.

$$16^{\log_4 5} + 10^{1 - \log_{10} 2} - 8 \log_2 3$$

Aufgabe 2.

$$(64^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 4} + 25^{\log_{12} 8}) \cdot 49^{\log_7 2}$$

Aufgabe 3.

$$81^{1 + \log_9 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_2 5}$$

Aufgabe 4.

$$32 \cdot (49^{\frac{1}{2} \log_2 9 - \log_2 6} + 6^{-\log_2 9^4})$$

Aufgabe 5.

$$25^{1 + \log_5 3} + 15^{\log_3 \sqrt{15}} - 49^{\log_7 3}$$

7.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$\log_2 16 \log_2 2$$

Lösung:

$$\log_2 16 + \log_2 2 = \log_2 (16 \cdot 2) = \log_2 32 = 5$$

Aufgabe 2.

$$\log_3 324 - \log_3 4$$

Lösung:

$$\log_3 324 - \log_3 4 = \log_3 (324 : 4) = \log_3 81 = 4$$

Aufgabe 3.

$$2\log_5 25$$

Lösung:

$$2\log_5 25 = \log_5 25^2 = \log_5 625 = 4$$

Aufgabe 4.

$$2. \ 5^{\log_2 5.6} - 3$$

Lösung:

$$2. \ 5^{\log_2 5.6} - 3 = 6 - 3 = 3$$

Aufgabe 5.

$$\log_3 3$$

Lösung:

$$\log_3 3 = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\log_5 \frac{1}{125}$$

Lösung:

$$\log_5 5^{-3} = -3 \log_5 5 = -3$$

Aufgabe 2.

$$4 \frac{\log_7 2}{\log_7 5} + \log_8 5$$

Lösung:

$$4 \frac{\log_7 2}{\log_7 5} + \log_8 5 = \log_8 2^4 + \log_8 5 = \log_8 16 + \log_8 5 = \log_8 (16 \cdot 5) = \log_8 80 = 1$$

Aufgabe 3.

$$\log_4 \sqrt{6} + 2\log_{16} \sqrt{6}$$

Lösung:

$$\log_4 \sqrt{6} + 2\log_4 \sqrt{6} = \log_4 \sqrt{6} + 2\frac{1}{2} \log_4 \sqrt{6} = \log_4 \sqrt{6} + \log_4 \sqrt{6} + \log_4 \sqrt{6} = 2\log_4 \sqrt{6} = 2\log_4 6^{\frac{1}{2}} = \log_4 6$$

Aufgabe 4.

$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72}$$

Lösung:

$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72} = \frac{\log_2 24 - \log_2 36}{\log_3 18 - \log_3 24} = \frac{\log_2 \frac{24}{36}}{\log_3 \frac{18}{24}} = \frac{\log_2 \frac{2}{3}}{\log_3 \frac{3}{4}} = \frac{\log_2 (2^1 \cdot 3^{-1})}{\log_3 (3^1 \cdot 4^{-1})} = \frac{1 - \log_2 3}{1 - \log_3 4} = \frac{1 - \log_2 3}{1 - 2\log_3 2}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{\log_2 1 + \log_2 \sqrt{11}}{\log_2 10} + 2\log_2 2$$

Lösung:

$$\frac{\log_2 1 + \log_2 \sqrt{11}}{\log_2 10 + 2\log_2 2} = \frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}} + \log_2 \sqrt{11}}{\log_2 10 + \log_2 2^2} = \frac{\log_2 (2^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}})}{\log_2 (10 \cdot 4)} = \frac{\log_2 (2 \cdot 11^{\frac{1}{2}})}{\log_2 (40)} = \log_{40} (2 \cdot 11^{\frac{1}{2}})$$

Level C

Aufgabe 1.

$$16^{\frac{1}{2} \log_5 5} + 10^1 - \log_{10} 2 - 8 \log_3 3$$

Lösung:

$$4^{2\log_5 5} + 10^1 - \log_{10} 2 - 8 \log_3 3 = 4^{2\log_5 5} + 10^1 - \log_{10} 2 - 2^{2\log_3 3} = 4^{\log_5 5^2} + 10 \cdot 10^{\log_{10} 2^{-1}} - 5^2 + 10 \cdot 2^{-1} - 3^2 = 25 + 5 - 27 = 3$$

Aufgabe 2.

$$(0.1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \log_8 4 + 25 \log_{128} 8 \cdot 49 \log_2 2$$

Lösung:

$$(0.1)^{\frac{1}{2}} \cdot (64^{-\frac{1}{2}} \log_8 4 + 5^{2\log_8 8}) \cdot 7^{2\log_2 2} = (8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-2\log_8 4} + 5^{2\log_8 8}) \cdot 7^{2\log_2 2} = (\sqrt{8} \cdot 8^{\log_8 4^{-1}} + 5^{\log_8 8}) \cdot 7^{\log_2 4} = (\sqrt{8} \cdot 4^{-1} + 8^{\frac{1}{2}}) \cdot 4 = (\frac{\sqrt{8}}{4} + 4) \cdot 4 = \sqrt{8} + 16$$

Aufgabe 3.

$$81^{1+\log_3 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_3 3 + 8 \log_8 5}$$

Lösung:

$$81 \cdot 81^{\log_3 5} + 2^3 \cdot \frac{1}{2} \log_3 3 \cdot 2^8 \cdot 8 \log_8 5 = 81 \cdot 9^{2\log_3 5} = 81 \cdot 9^{\log_3 25} = 81 \cdot 9^2 = 81 \cdot 81 = 25 \cdot 84 = 2100$$

Aufgabe 4.

$$32 \cdot (49^{\frac{1}{2} \log_2 8 - \log_2 6} + 6^{-\log_2 6^4})$$

Lösung:

$$32(7^{10}9^9 + 7^{-20}9^0 + 6^{-10}9^{\frac{1}{2}}) = 32(9 \cdot 6^{-2} + 4^{-2}) = 32(\frac{9}{36} + \frac{1}{16}) = 32(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = \frac{960}{16} = 10$$

Aufgabe 5.

$$25^{1+\log_3 3} + 15^{109/134} - 49^{109/13}$$

Lösung:

$$5^2 \cdot 5^{2 \log_3 3} + 15^{\frac{1}{3} \sqrt{134}} - 7^{2 \log_3 3} = 5^2 + 5^6 + 15^2 - 7^6 = 5^8 + 125 - 7^6 = 390625 + 125 -$$

$$1176649 = 273101$$

8 Polynomdivision

9 Mengenlehre

9.1 Übungen

Bestimmen Sie die Mengen:

Aufgabe 1.

Gegeben sind die Mengen

$$A = a, b, c \text{ und } B = d, a, f$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

Aufgabe 2.

Gegeben sind die Mengen $C = m, n, x$ und $D = y, b, x$

$$C \setminus D =$$

$$D \setminus C =$$

Aufgabe 3.

Gegeben sind die Mengen $N = a, k, c$ und $M = f, c, n$

$$N \cap M =$$

$$N \setminus M =$$

Aufgabe 4.

Gegeben sind die Mengen $F = a, x, y$ und $K = a, f, y$

$$F \cap K =$$

$$K \setminus F =$$

Aufgabe 5.

Gegeben sind die Mengen $A = a, b, c, d$ und $F = x, y, b, d$

$$A \cup F =$$

$$A \cap F =$$

Aufgabe 6.

Gegeben sind die Mengen $U = m, n, x, y, a, b, c, A = x, y, a, m$ und $B = x, n, a, b, m$

$$A \cap B =$$

$$U \setminus A =$$

Aufgabe 7.

Gegeben sind die Mengen $X = n, m, a, b, c, f, y, V = a, b, f, n$ und $U = a, c, n, m, y$

$$X \setminus V =$$

$$X \setminus U =$$

$$(X \setminus V) \cap (X \setminus U) =$$

Aufgabe 8.

Gegeben sind die Mengen $Y = q, c, e, d, f, n, k, A = q, c, d, k$ und $B = c, e, d, f, q$

$$Y \setminus A =$$

$$Y \setminus B =$$

$$(Y \setminus A) \setminus (Y \setminus B) =$$

Aufgabe 9.

Gegeben sind die Mengen $M = a, m, n, q, d, c, e, r, K = n, q, c, e$ und $F = d, a, n,$

$$F \cap$$

$$M \setminus K =$$

$$M \setminus F =$$

$$(M \setminus F) \setminus (M \setminus K) =$$

$$(M \setminus F) \cap (M \setminus K) =$$

Aufgabe 10.

Gegeben sind die Mengen $K = c, b, d, k, f, n, i, V = d, k, f, i$ und $C = b, d, k, j$

$$K \setminus V =$$

$$K \setminus C =$$

$$(K \setminus V) \cap (K \setminus C) =$$

9.2 Lösung

Bestimmen Sie die Mengen:

Aufgabe 1.

Gegeben sind die Mengen $A = a, b, c$ und $B = d, a, f$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$$

Aufgabe 2.

Gegeben sind die Mengen $C = m, n, x$ und $D = y, b, x$

$$C \setminus D = \{m, n\}$$

$$D \setminus C = \{y, b\}$$

Gegeben sind die Mengen $N = a, k, c$ und $M = f, c, n$

$$N \cap M = \{c\}$$

$$N \setminus M = \{k, a\}$$

Aufgabe 4.

Gegeben sind die Mengen $F = a, x, y$ und $K = a, f, y$

$$F \cap K = \{a, y\}$$

$$K \setminus F = \{f\}$$

Aufgabe 5.

Gegeben sind die Mengen $A = a, b, c, d$ und $F = x, y, b, d$

$$A \cup F = \{a, c, x, y\}$$

$$A \cap F = \{b, d\}$$

Aufgabe 6.

Gegeben sind die Mengen $U = m, n, x, y, a, b, c, A = x, y, a, m$ und

$$B = x, n, a, b, m$$

$$A \cap B = \{x, m, a\}$$

$$U \setminus A = \{n, b, c\}$$

Aufgabe 7.

Gegeben sind die Mengen $X = n, m, a, b, c, f, y, V = a, b, f, n$ und

$$U = a, c, n, m, y$$

$$X \setminus V = \{m, y, c\}$$

$$X \setminus U = \{b, f\}$$

$$(X \setminus V) \cap (X \setminus U) = \{f\}$$

Aufgabe 8.

Gegeben sind die Mengen $Y = q, c, e, d, f, n, k, A = q, c, d, k$ und

$$B = c, e, d, f, q$$

$$Y \setminus A = \{e, f, n\}$$

$$Y \setminus B = \{n, k\}$$

$$(Y \setminus A) \cup (Y \setminus B) = \{e, f, n, k\}$$

Aufgabe 9.

Gegeben sind die Mengen $M = a, m, n, q, d, c, e, r, K = n, q, c, e$ und

$$F = d, a, n, r, e$$

$$M \setminus K = \{a, m, r, d\}$$

$$M \setminus F = \{m, q, c\}$$

$$(M \setminus F) \cup (M \setminus K) = \{m, q, c, a, r, d\}$$

$$(M \setminus F) \cap (M \setminus K) = \{m\}$$

Aufgabe 10.

Gegeben sind die Mengen $K = c, b, d, k, f, n, i$, $V = d, k, f, i$ und

$$C = b, d, k, j$$

$$K \setminus V = \{c, b, n\}$$

$$K \setminus C = \{c, f, n\}$$

$$(K \setminus V) \cap (K \setminus C) = \{c, n\}$$

10 Zahlenmengen

10.1 Übungen

Aufgabe 1.

Geben Sie die folgende Menge als Intervall an.

$$A = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

Aufgabe 2.

Geben Sie die folgende Menge als Intervall an.

$$B = \{x \mid -8 < x < 4\}$$

Aufgabe 3.

Wandeln Sie die Intervallschreibweise in Mengenschreibweise um.

$$A = [-10; +\infty)$$

Aufgabe 4.

Wandeln Sie die Intervallschreibweise in Mengenschreibweise um.

$$B = (-\infty; 0]$$

Aufgabe 5.

Welche Aussage ist richtig für die gegebene Lösungsmenge?

$$L = \mathbb{Q} \setminus [-2; 4]$$

Die Lösungsmenge enthält alle Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen.

Die Lösungsmenge enthält zwei rationale Zahlen: die -2 und 4 Die Lösungsmenge enthält

rationale Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen. Die Lösungsmenge enthält rationale Zah-

len, die zwischen -2 und 4 liegen, einschließlich der Grenzen. Die Lösungsmenge enthält

nicht rationale Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen, einschließlich der Grenzen.

Aufgabe 6.

Welche Aussage ist richtig für die gegebene Lösungsmenge?

$$L = \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen bis einschließlich 10. Die

Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, die größer 10 sind. Die Lösungsmenge enthält

die reelle Zahl 10. Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen außer 10. Die Lösungs-

menge enthält alle reellen Zahlen, die kleiner 10 sind.

10.2 Lösung

Aufgabe 1.

Geben Sie die folgende Menge als Intervall an.

$$A = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

$$A = [-3; 3]$$

Aufgabe 2.

Geben Sie die folgende Menge als Intervall an.

$$B = \{x \mid -8 < x < 4\}$$

$$B = (-8; 4)$$

Aufgabe 3.

Wandeln Sie die Intervallschreibweise in Mengenschreibweise um.

$$A = [-10; +\infty)$$

$$A = \{x | x \geq -10\}$$

Aufgabe 4.

Wandeln Sie die Intervallschreibweise in Mengenschreibweise um.

$$B = (-\infty; 0]$$

$$B = \{x | x \leq 0\}$$

Aufgabe 5.

Welche Aussage ist richtig für die gegebene Lösungsmenge?

$$L = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 4\}$$

Die Lösungsmenge enthält alle Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen.

Die Lösungsmenge enthält zwei rationale Zahlen: die -2 und 4

Die Lösungsmenge enthält rationale Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen.

Die Lösungsmenge enthält rationale Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen, einschließlich der Grenzen.

Die Lösungsmenge enthält nicht rationale Zahlen, die zwischen -2 und 4 liegen, einschließlich der Grenzen. (richtig)

Aufgabe 6.

Welche Aussage ist richtig für die gegebene Lösungsmenge?

$$L = \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen bis einschließlich 10.

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, die größer 10 sind.

Die Lösungsmenge enthält die reelle Zahl 10.

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen außer 10. (richtig)

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, die kleiner 10 sind.

11 Lineare Gleichungen

11.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichungen:

Level A

Aufgabe 1.

$$15 + 14x = 17x + 3$$

Aufgabe 2.

$$2,55 - 0,45r = 3 + 2,55r$$

Aufgabe 3.

$$0,8a + 14 = 2 - 1,6a$$

Aufgabe 4.

$$\frac{1}{3}y + 4 = \frac{2}{3}y + 1$$

Aufgabe 5.

$$q - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}q$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(13b - 15) - (9 + 6b) = -3b$$

Aufgabe 2.

$$12 - (4c - 18) = (36 + 4c) + (18 - 6c)$$

Aufgabe 3.

$$1,0p - (p - 2,8) = (0,2p + 1,5) - 0,7$$

Aufgabe 4.

$$(0,5y + 1,2) - (3,6 - 4,5y) = (4,8 - 0,3y) + (10,5y + 0,6)$$

Aufgabe 5.

$$(5, 3f - 0,8) - (1,6 - 4,7f) = 2f - (f - 0,3)$$

Level C

Aufgabe 1.

$$1 - \frac{b-3}{2} = \frac{2-a}{3} + 4$$

Aufgabe 2.

$$\frac{6c+7}{4} + \frac{8-5c}{3} = 5$$

Aufgabe 3.

$$\frac{11b-4}{7} - \frac{b-9}{2} = 5$$

Aufgabe 4.

$$\frac{3a-1}{24} - \frac{2a+6}{36} - 1 = 0$$

Aufgabe 5.

$$5 - \frac{1-2a}{4} = \frac{3a+20}{6} + \frac{a}{3}$$

11.2 Lösung

large Lösen Sie die Gleichungen:

Level A

Aufgabe 1.

$$45 + 14x = 17x + 3$$

Lösung:

$$45 - 3 = 17x - 14x$$

$$42 = 3x$$

$$x = \frac{42}{3}$$

$$x = 14$$

Aufgabe 2.

$$2,55 - 0,45r = 3 + 2,55r$$

Lösung:

$$2,55 - 3 = 2,55r + 0,45r$$

$$-0,45 = 3r$$

$$r = -0,15$$

Aufgabe 3.

$$0,8a + 14 = 2 - 1,6a$$

Lösung:

$$0,8a + 1,6a = 2 - 14$$

$$2,4a = -12$$

$$a = -\frac{12}{2,4}$$

$$a = -5$$

Aufgabe 4.

$$1\frac{1}{3}y + 4 = \frac{1}{3}y + 1$$

Lösung:

$$1\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y = 1 - 4$$

$$y = -3$$

Aufgabe 5.

$$q - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}q$$

Lösung:

$$q - \frac{1}{2}q = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}q = \frac{5}{6}$$

$$q = 1\frac{1}{4}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(13b - 15) - (9 + 6b) = -3b$$

Lösung:

$$13b - 15 - 9 - 6b = -3b$$

$$13b - 6b + 3b = 15 + 9$$

$$10b = 24$$

$$b = 2,4$$

Aufgabe 2.

$$12 - (4c - 18) = (36 + 4c) + (18 - 6c)$$

Lösung:

$$12 - 4c + 18 = 36 + 4c + 18 - 6c$$

$$-4c - 5c + 6c = 36 + 18 - 18 - 12$$

$$-2c = 24$$

$$c = -12$$

Aufgabe 3.

$$1,6p - (p - 2,8) = (0,2p + 1,5) - 0,7$$

Lösung:

$$1,6p - p + 2,8 = 0,2p + 1,5 - 0,7$$

$$1,6p - p - 0,2p = 1,5 - 0,7 - 2,8$$

$$0,4p = -2$$

$$p = -5$$

Aufgabe 4.

$$(0,5y + 1,2) - (3,6 - 4,5y) = (4,8 - 0,3y) + (10,5y + 0,6)$$

Lösung:

$$0,5y + 1,2 - 3,6 + 4,5y = 4,8 - 0,3y + 10,5y + 0,6$$

$$0,5y + 4,5y + 0,3y - 10,5y = 4,8 + 0,6 - 1,2 + 3,6$$

$$-5,2y = 7,8$$

$$y = -1,5$$

Aufgabe 5.

$$(5,3f - 0,8) - (1,6 - 4,7f) = 2f - (f - 0,3)$$

Lösung:

$$5,3f - 0,8 - 1,6 + 4,7f = 2f - f + 0,3$$

$$5,3f + 4,7f - 2f + f = 0,3 + 0,8 + 1,6$$

$$9f = 2,7$$

$$f = 0,3$$

Level C

Aufgabe 1.

$$1 - \frac{x-3}{2} = \frac{2-x}{3} + 4$$

Lösung:

$$1 - \frac{x-3}{2} = \frac{2-x}{3} + 4 \quad | \cdot 6$$

$$6 - 3(x-3) = 2(2-x) + 24$$

$$6 - 3y + 9 = 4 - 2y + 24$$

$$-3y + 2y = 24 + 4 - 6 - 9$$

$$-y = 13$$

$$y = -13$$

Aufgabe 2.

$$\frac{6x+7}{4} + \frac{8-5x}{3} = 5$$

Lösung:

$$\frac{6x+7}{4} + \frac{8-5x}{3} = 5 \quad | \cdot 12$$

$$3(6x+7) + 4(8-5x) = 60$$

$$18x + 21 + 32 - 20x - 60 = 0$$

$$18x - 20x = 60 - 32 - 21$$

$$-2x = 7$$

$$x = -3,5$$

Aufgabe 3.

$$\frac{11b-4}{7} - \frac{b-9}{2} = 5$$

Lösung:

$$\frac{11b-4}{7} - \frac{b-9}{2} = 5 \quad | \cdot 14$$

$$2(11b-4) - 7(b-9) = 70$$

$$22b - 8 - 7b + 63 = 70$$

$$22b - 7b = 70 - 63 + 8$$

$$15b = -1$$

$$b = -\frac{1}{15}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{3a-1}{24} - \frac{2a+6}{36} - 1 = 0$$

Lösung:

$$3(3a-1) - 2(2a+6) - 72 = 0$$

$$9a - 3 - 4a - 12 - 72 = 0$$

$$5a = 72 + 12 + 3$$

$$5a = 87$$

$$a = 17,4$$

Aufgabe 5.

$$5 - \frac{1-2n}{4} = \frac{3n+20}{6} + \frac{n}{3}$$

Lösung:

$$5 - \frac{1-2n}{4} = \frac{3n+20}{6} + \frac{n}{3} \quad | \cdot 24$$

$$120 - 6(1-2n) = 3(3n+20) + 8n$$

$$120 - 6 + 12n = 9n + 60 + 8n$$

$$120 - 6 + 12n - 9n - 60 - 8n = 0$$

$$12n - 9n - 8n = 60 - 120 + 6$$

$$-5n = 54$$

$$n = 10,8$$

12 Betragsgleichungen

12.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichungen:

Level A

Aufgabe 1.

$$|x| + 4 = 6x - 2$$

Aufgabe 2.

$$|m| - 3 = 3m + 2$$

Aufgabe 3.

$$|c - 1| = \frac{1}{4}c$$

Aufgabe 4.

$$|a + 1| = -\frac{3}{5}a$$

Aufgabe 5.

$$|b - 4| + 2b = 4$$

Level B

Aufgabe 1.

$$|5x - 4| = |4x - 6|$$

Aufgabe 2.

$$|8b - 5| = |3b + 2|$$

Aufgabe 3.

$$|2n - 3| + 3|n + 1| = 7$$

$$|4x - 3| + 2|a + 2| = 7$$

Lösung:

Lösung:

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m(m - 3) = 0$$

$$m = 0 \text{ oder } m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Level C

Aufgabe 1.

$$||c + 1| - 4| = 3$$

Aufgabe 2.

$$|8 - |k - 2|| = 7$$

Aufgabe 3.

$$|4f + 4| - 5| = f$$

Aufgabe 4.

$$||n + 4| - 5| = n + 7$$

Aufgabe 5.

$$||p - 5| - 5| - 5| = 5$$

12.2 Lösung

kurze Lösen Sie die Gleichungen:

Level A

Aufgabe 1.

$$|x| + 4 = 6x - 2$$

Lösung:

$$|x| = 6x - 2 - 4$$

$$|x| = 6x - 6$$

$$x = 6x - 6 \quad \text{oder} \quad x = -(6x - 6)$$

$$x - 6x = -6 \quad x = -6x + 6$$

$$-5x = -6 \quad 7x = 6$$

$$x = \frac{6}{5} \quad x = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 2.

$$|m| - 3 = 3m + 2$$

Lösung:

$$|m| = 3m + 2 + 3$$

$$|m| = 3m + 5$$

$$m = 3m + 5 \quad \text{oder}$$

$$m - 3m = 5$$

$$-2m = 5$$

$$m = -\frac{5}{2}$$

$$m = -(3m + 5)$$

$$m + 3m = -5$$

$$4m = -5$$

$$m = -\frac{5}{4}$$

Aufgabe 3.

$$|c - 1| = \frac{1}{4}c$$

Lösung:

$$|c - 1| = \frac{1}{4}c$$

$$c - 1 = \frac{1}{4}c \quad \text{oder} \quad c - 1 = -\frac{1}{4}c$$

$$c - \frac{1}{4}c = 1 \quad c + \frac{1}{4}c = 1$$

$$\frac{3}{4}c = 1 \quad \frac{5}{4}c = 1$$

$$c = \frac{4}{3} \quad c = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 4.

$$|a + 1| = -\frac{1}{3}a$$

Lösung:

$$|a + 1| = -\frac{1}{3}a$$

$$a + 1 = -\frac{1}{3}a \quad \text{oder} \quad a + 1 = \frac{1}{3}a$$

$$a + \frac{1}{3}a = -1 \quad a - \frac{1}{3}a = -1$$

$$\frac{4}{3}a = -1 \quad \frac{2}{3}a = -1$$

$$a = -\frac{3}{4} \quad a = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5.

$$|b - 4| + 2b = 4$$

Lösung:

$$|b - 4| + 2b = 4$$

$$|b - 4| = 4 - 2b$$

$$b - 4 = 4 - 2b \quad \text{oder} \quad b - 4 = -(4 - 2b)$$

$$b + 2b = 4 + 4 \quad b - 4 = -4 + 2b$$

$$3b = 8 \quad b - 2b = -4 + 4$$

$$b = \frac{8}{3} \quad -b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Level B

Aufgabe 1.

$$|5x - 4| = |4x - 6|$$

Lösung:

$$|5x - 4| = 4x - 6 \quad \text{oder} \quad 5x - 4 = -4x + 6$$

$$5x - 4x = -6 + 4 \quad 5x + 4x = 6 + 4$$

$$x = -2 \quad 9x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}$$

Aufgabe 2.

$$|8b - 5| = |3b + 2|$$

Lösung:

$$8b - 5 = 3b + 2 \quad \text{oder} \quad 8b - 5 = -3b - 2$$

$$8b - 3b = 2 + 5 \quad 8b + 3b = -2 + 5$$

$$5b = 7 \quad 11b = 3$$

$$b = \frac{7}{5} \quad b = \frac{3}{11}$$

Aufgabe 3.

$$|2n - 3| + 3|n + 1| = 7$$

Lösung:

Aufgabe 4.

$$|4x - 3| + 2|a + 2| = 7$$

Lösung:

Aufgabe 5.

$$|m^2 - 3m| = 0$$

Lösung:

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m(m - 3) = 0$$

$$m = 0 \text{ oder } m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Lösung:

$$5,3f - 0,8 - 1,6 + 4,7f = 2f - f + 0,3$$

$$5,3f + 4,7f - 2f + f = 0,3 + 0,8 + 1,6$$

$$9f = 2,7$$

$$f = 0,3$$

Level C

Aufgabe 1.

$$||c + 1| - 4| = 3$$

Lösung:

$$|c + 1| = 3 + 4 \quad \text{oder} \quad |c + 1| = -3 + 4$$

$$|c + 1| = 7 \quad |c + 1| = 1$$

$$c + 1 = 7 \text{ oder } c + 1 = -7 \quad c + 1 = 1 \text{ oder } c + 1 = -1$$

$$c = 6 \quad c = -8 \quad c = 0 \quad c = -2$$

Aufgabe 2.

$$|8 - |k - 2|| = 7$$

Lösung:

$$|8 - |k - 2|| = 7$$

$$8 - |k - 2| = 7 \quad \text{oder} \quad 8 - |k - 2| = -7$$

$$8 - 7 = |k - 2| \quad 8 + 7 = |k - 2|$$

$$|k - 2| = 1 \quad |k - 2| = 15$$

$$k - 2 = 1 \text{ oder } k - 2 = -1 \quad k - 2 = 15 \text{ oder } k - 2 = -15$$

$$k = 3 \quad k = -1 \quad k = 17 \quad k = -13$$

Aufgabe 3.

$$||4f + 4| - 5| = f$$

Lösung:

$$|4f + 4| - 5 = f \quad \text{oder} \quad |4f + 4| - 5 = -f$$

$$|4f + 4| = f + 5 \quad 4f + 4 = -f + 5$$

$$4f + 4 = f + 5 \text{ oder } 4f + 4 = -f - 5 \quad 4f + 4 = -f + 5 \text{ oder } 4f + 4 = f - 5$$

$$3f = 1 \quad 5f = -9 \quad 5f = 1 \quad 3f = -9$$

$$f = \frac{1}{3} \quad f = -\frac{9}{5} \quad f = \frac{1}{5} \quad f = -3$$

Aufgabe 4.

$$||n + 4| - 5| = n + 7$$

Lösung:

$$|n + 4| - 5 = n + 7$$

$$\text{oder} \quad |n + 4| - 5 = -n - 7$$

$$|n + 4| = n + 12 \quad |n + 4| = -n - 2$$

$$n+4 = n+1+2 \text{ oder } n+4 = -n-12$$

$$n+4 = n-2 \text{ oder } n+4 = n+2$$

$$n \neq n \quad 2n = -8$$

$$2n = -6$$

$$0 \neq -2$$

$$n = -4, n = -3$$

Aufgabe 5.

$$||p-5|-5|-5| = 5$$

Lösung:

$$||p-5|-5|-5 = 5$$

oder

$$||p-5|-5|-5 = -5$$

$$|p-5|-5 = 10$$

$$|p-5|-5 = 0$$

$$|p-5|-5 = 10 \text{ oder } |p-5|-5 = -10$$

$$|p-5|-5 = 0$$

$$|p-5| = 15$$

$$|p-5| = -5$$

$$|p-5| = 5$$

13 Lineare Gleichungssysteme

13.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichungssysteme:

Level A

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ 3y - x = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} a = 8 - b \\ 3b - a = 12 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} m - 2n = 4 \\ n - 3m = -2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} 3p - r = 2 \\ p + 2r = 10 \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} 3f + c = 7 \\ 9f - 4c = -7 \end{cases}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} 6(x+y) + 2 = x + 8y \\ 14 - 4(x-y) = x - 16y \end{cases}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} 1 + 2(a-b) = 3a - 4b \\ 10 - 4(a+b) = 3b - 3a \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m+n) = 8 \\ \frac{1}{4}(m-2n) = 4 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} \frac{2f+1}{5} = \frac{f-1}{2} \\ 4a + 5f = 23 \end{cases}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ z - y = 6 \\ x - z = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b - c = 7 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} m - n - k = 0 \\ m + n - k = 4 \\ m + n + k = 6 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p+c} = \frac{3}{6} \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} \frac{f+1}{3m-4} = \frac{1}{2} \\ \frac{5m+f}{3m+11} = 1 \end{cases}$$

13.2 Lösung

Lösen Sie die Gleichungssysteme:

Level A

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ 3y - x = 7 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y - 4 \\ 3y - (y - 4) = 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 \\ 3y - y + 4 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 \\ 2y = 7 - 4 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 \\ 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 \\ y = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 - 4 \\ y = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2,5 \\ y = 1,5 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} a = 8 - b \\ 3b - a = 12 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 8 - b \\ 3b - (8 - b) = 12 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ 3b - 8 + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ 4b = 12 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ 4b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ b = \frac{20}{4} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a = 8 - 5 \\ b = 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} m - 2n = 4 \\ n - 3m = -2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} m - 2n = 4 \\ n - 3m = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 + 2n \\ n - 3m = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 + 2n \\ n - 3(4 + 2n) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 4 + 2n \\ n - 12 - 6n = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 + 2n \\ -5n = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 + 2n \\ n = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 4 - 4 \\ n = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 0 \\ n = -2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} 3p - r = 2 \\ p + 2r = 10 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 3p - r = 2 \\ p + 2r = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - r = 2 \\ p = 10 - 2r \end{cases} \quad \begin{cases} 3(10 - 2r) - r = 2 \\ p = 10 - 2r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 - 6r - r = 2 \\ p = 10 - 2r \end{cases} \quad \begin{cases} -7r = -28 \\ p = 10 - 2r \end{cases} \quad \begin{cases} r = 4 \\ p = 10 - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} r = 4 \\ p = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} 3f + c = 7 \\ 9f - 4c = -7 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 3f + c = 7 \\ 9f - 4c = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 7 - 3f \\ 9f - 4c = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 7 - 3f \\ 9f - 4(7 - 3f) = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 7 - 3f \\ 9f - 28 + 12f = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 7 - 3f \\ 21f = -7 + 28 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 7 - 3f \\ f = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 4 \\ f = 1 \end{cases}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} 6(x + y) + 2 = x + 8y \\ 14 - 4(x - y) = x - 16y \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 6x + 6y + 2 = x + 8y \\ 14 - 4x + 4y = x - 16y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 20y - 5x = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ -5x + 20y = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 18y = -16 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ y = -\frac{8}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = -2 - \frac{16}{9} \\ y = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = -\frac{34}{9} \\ y = -\frac{8}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{34}{45} \\ y = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} 1 + 2(a - b) = 3a - 4b \\ 10 - 4(a + b) = 3b - 3a \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 1 + 2a - 2b = 3a - 4b \\ 10 - 4a - 4b = 3b - 3a \end{cases} \quad \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ -a - 7b = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + 1 = a \\ 10 = 2b + 1 + 7b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ 9b = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b + 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m + n) = 8 \\ \frac{1}{4}(m - 2n) = 4 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 8 \\ + \\ \frac{1}{4}m - \frac{1}{2}n = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 8 \\ \frac{3}{4}m = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 8 \\ m = \frac{12 \cdot 4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + n = 16 \\ m = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 0 \\ m = 16 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)^2 + y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ 16 - 8y + y^2 + y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ 2y^2 - 8y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ (y - 2)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} \frac{2a+1}{5} = \frac{f-1}{2} \\ 4a + 5f = 23 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} (2a + 1) \cdot 2 = 5(f - 1) \\ 4a + 5f = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 2 = 5f - 5 \\ 4a + 5f = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a - 5f = -7 \\ 4a + 5f = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 5f = -7 \\ 8a = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a - 5f = -4 \\ a = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 5f = -7 \\ a = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} f = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ z - y = 6 \\ x - z = 7 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ z = 6 + y \\ 5 - y - 6 - y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y \\ z = 6 + y \\ -2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y \\ z = 6 + y \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ z = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b - c = 7 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b - c = 7 \\ a = 2 + b \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + 2b + c = 9 \\ 4 + 4b = 16 \\ a = 2 + b \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + c = 7 \\ 4b = 12 \\ a = 2 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 7 - 2b \\ b = 3 \\ a = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} m - n - k = 0 \\ m + n - k = 4 \\ m + n + k = 6 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} m - n - k = 0 \\ m + n - k = 4 \\ m + n + k = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m = n + k \\ n + n + k - k = 4 \\ m + m = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m = n + k \\ 2n = 4 \\ 2m = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \\ 3 = 2 + k \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p+c} - \frac{1}{p-c} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p+c} - \frac{1}{p-c} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p-c} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} p - c = 1 \\ \frac{2p}{p^2 - c^2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 1 + c \\ 16p = 5p^2 - 5c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 + c \\ 16(1 + c) = 5(1 + c^2) - 5c^2 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} 16(1 + c) = 5 + 10c + 5c^2 - 5c^2 \\ 16 + 16c = 10c + 5 \\ 16c - 10c = 5 - 16 \\ 6c = -11 \\ c = -\frac{11}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 + c \\ c = -1,5 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -0,5 \\ c = -1,5 \end{cases}$$

$$6c = -11$$

$$c = -\frac{11}{6}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} \frac{f+1}{3m-4} = \frac{1}{2} \\ \frac{5m+f}{3m+11} = 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 2(f+1) = 3m-4 \\ 5m+f = 3m+11 \end{cases} \quad \begin{cases} 2f+2-3m = -4 \\ 5m+f-3m = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 2f-3m = -6 \\ 2m+f = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 11-2m \\ 2(11-2m)-3m = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} f = 11-2m \\ 22-4m-3m = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} -7m = -6-22 \\ f = 11-2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 4 \\ f = 11-8 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 \\ f = 3 \end{cases}$$

14 Textaufgaben

14.1 Übungen

Level A

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} \frac{y^2-3y-1}{y^2+y+1} < 3, \\ \frac{y^2-3y-1}{y^2+y+1} < -3; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2-3y-1 < 3(y^2+y+1), \\ y^2-3y-1 < -3(y^2+y+1); \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2-3y-1 < 3y^2+3y+3, \\ y^2-3y-1 < -3y^2-3y-3; \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-3y^2-3y-1-3 < 0, \\ y^2+3y^2-3y+3y-1+3 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} -2y^2-6y-4 < 0, \\ 4y^2+2 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2+3y+2 > 0, \\ 2y^2+1 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y_1+y_2 > -1; \\ y_1 \cdot y_2 > 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 > -1, \\ y_2 > -2. \end{cases} \quad \text{Antwort: } y \in (-2; +\infty)$$

Aufgabe 3.

$$\left| \frac{z+3}{z-27} \right| < 1$$

Lösung:

$$\begin{cases} z+3 < z-27, \\ z+3 < -z+27; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} z-z < -3-27, \\ z+z < 27-3; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 < 30, \\ 2z < 24; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 < 30, \\ z < 12. \end{cases}$$

Antwort: $z \in (-\infty; 12)$

Aufgabe 4.

$$((a+1)^{-1} - (a+6)^{-1})^2 \leq \frac{|a^2-10a|}{(a^2+7a+6)^2}$$

Lösung:

$$\frac{|a^2-10a|-25}{(a^2+7a+6)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 6, \\ a \neq -1, \Leftrightarrow \\ |a^2-10a| \geq 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-10a-25 \geq 0, \\ a^2-10a+25 \leq 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} a \geq 5+5\sqrt{2}, \\ a \leq 5-5\sqrt{2}, \\ a = 5. \end{cases}$$

Antwort: $a \in (-\infty; -6) \cup [-6; 5-5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5+5\sqrt{2}; +\infty)$

Aufgabe 5.

$$25m^2 - 3|3-5m| < 30m-9$$

Lösung:

$$25m^2 - 30m + 9 - 3|3-5m| < 0$$

$$(5m-3)^2 - 3|3-5m| < 0$$

$$l = |3-5m|$$

$$l^2 - 3l < 0$$

$$0 < l < 3$$

$$0 < |5m-3| < 3$$

$$0 < m < \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} < m < \frac{6}{5}$$

Antwort: $m \in (0; \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}; \frac{6}{5})$

21 Lineare Funktionen

21.1 Übungen

Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Aufgaben 1-10: Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 1.

$$y = -3x + 7$$

Aufgabe 2.

$$y = 2x - 2$$

Aufgabe 3.

$$y = 0,7x$$

Aufgabe 4.

$$y = 1,3x$$

Aufgabe 5.

$$y = 2(x - 1) + 3$$

Aufgabe 6.

$$y = |x| - 1$$

Aufgabe 7.

$$y = |2x - 4|$$

Aufgabe 8.

$$y = 1 - |x|$$

Aufgabe 9.

$$y = |x| + x$$

Aufgabe 10.

$$y = |x| - x$$

Aufgaben 11-13: Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionen (an welchem Punkt schneiden sich die Geraden?).

Aufgabe 11.

$$f(x) = 4 - x \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

Aufgabe 12.

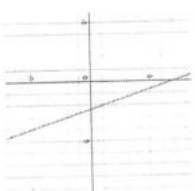
$$f(x) = 2 - x \text{ und } h(x) = 3(x + 2)$$

Aufgabe 13.

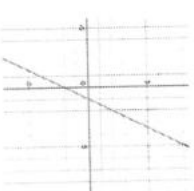
$$g(x) = -\frac{1}{4}x \text{ und } h(x) = x - 3$$

21.2 Lösung

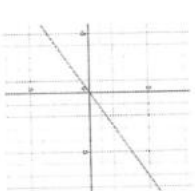
Aufgabe 1. $y = 3x^2$



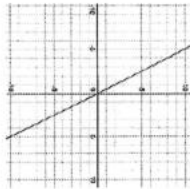
Aufgabe 2. $y = -4x^2$



Aufgabe 3. $y = 2x^2$



Aufgabe 10. $y = |x| - x$



Aufgabe 11.

$$f(x) = 4 - x \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

die zwei Gleichungen gleichsetzen:

$$4 - x = \frac{1}{2}x + 2$$

$$1,5x = 2$$

$$x = \frac{4}{3}$$

x in eine der Gleichungen einsetzen, um den Wert von y zu ermitteln:

$$y = 4 - \frac{4}{3}$$

$$y = 2\frac{2}{3}$$

Aufgabe 12.

$$f(x) = 2 - x \text{ und } h(x) = 3(x + 2)$$

$$2 - x = 3(x + 2)$$

$$x = -1$$

$$y = 3(-1 + 2)$$

$y = 3$ Aufgabe 13.

$$g(x) = -\frac{1}{4}x \text{ und } h(x) = x - 3$$

$$-\frac{1}{4}x = x - 3$$

$$x = 2,4$$

$$y = 2,4 - 3$$

$$y = -0,6$$

22 Quadratische Funktionen

22.1 Übungen

Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 1. $y = 3x^2$

Aufgabe 2. $y = -4x^2$

Aufgabe 3. $y = 2x^2$

Aufgabe 4. $y = -\frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 5. $y = \frac{1}{3}x^2$

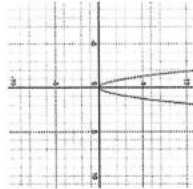
Aufgabe 6. $y = -2x^2 + 6$

22.2 Lösung

Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

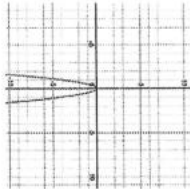
Aufgabe 1. $y = 3x^2$

Lösung:



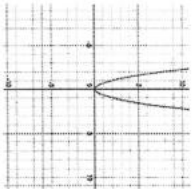
Aufgabe 2. $y = -4x^2$

Lösung:



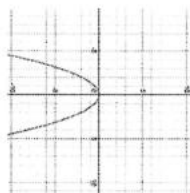
Aufgabe 3. $y = 2x^2$

Lösung:



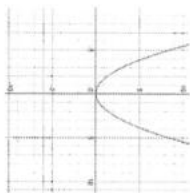
Aufgabe 4. $y = -\frac{1}{2}x^2$

Lösung:



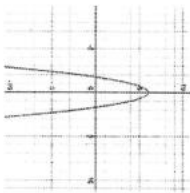
Aufgabe 5. $y = \frac{1}{3}x^2$

Lösung:



Aufgabe 6. $y = -2x^2 + 6$

Lösung:



23 Potenzfunktionen

23.1 Übungen

Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Aufgabe 1.

$$f(x) = x^3$$

Aufgabe 2.

$$f(x) = x^{-3}$$

Aufgabe 3.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 4.

$$f(x) = x^{-2}$$

Aufgabe 5.

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 6.

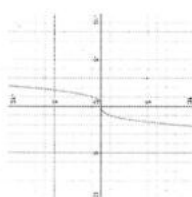
$$f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 7.

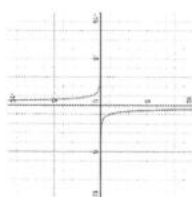
$$f(x) = -x^{-\frac{1}{3}}$$

23.2 Lösung

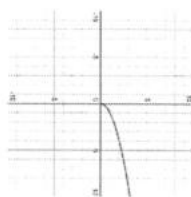
Aufgabe 1. $f(x) = x^3$



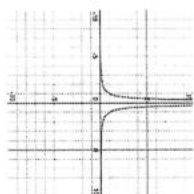
Aufgabe 2. $f(x) = x^{-3}$



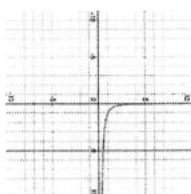
Aufgabe 3. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$



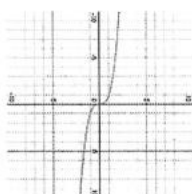
Aufgabe 4. $f(x) = x^{-2}$



Aufgabe 5. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$



Aufgabe 6. $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$



Aufgabe 7. $f(x) = -x^{-\frac{1}{3}}$



24 Exponential-/Logarithmusfunktionen

24.1 Übungen

Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Aufgabe 1.

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Aufgabe 2.

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

Aufgabe 3.

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$$

Aufgabe 4.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$$

Aufgabe 5.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Aufgabe 6.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} (x+1)$$

Aufgabe 7.

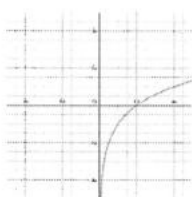
$$f(x) = \log_4(x-2)$$

Aufgabe 8.

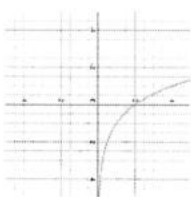
$$f(x) = \log_8 x$$

24.2 Lösung

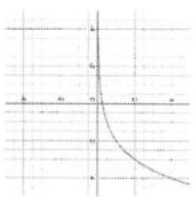
Aufgabe 1. $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



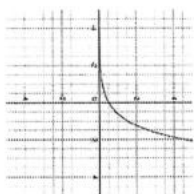
Aufgabe 2. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$



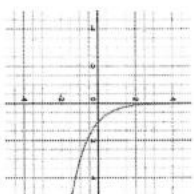
Aufgabe 3. $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$



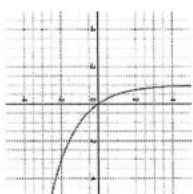
Aufgabe 4. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$



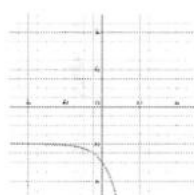
Aufgabe 5. $f(x) = \log_3 x$



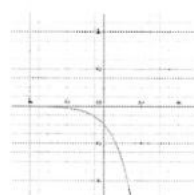
Aufgabe 6. $f(x) = \log_3 (x+1)$



Aufgabe 7. $f(x) = \log_4 (x-2)$



Aufgabe 8. $f(x) = \log_8 x$



25 Trigonometrische Funktionen.

25.1 Übungen

Aufgaben 1-2: Ordnen Sie den Funktionsgleichungen die richtigen Funktionsgraphen zu

Aufgabe 1.

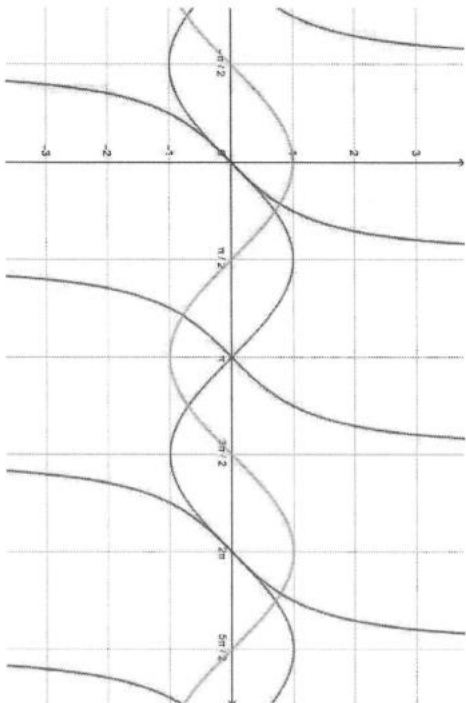
Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \tan(x)$$

$$h(x) = \cos(x)$$

Funktionsgraphen:



Aufgabe 2.

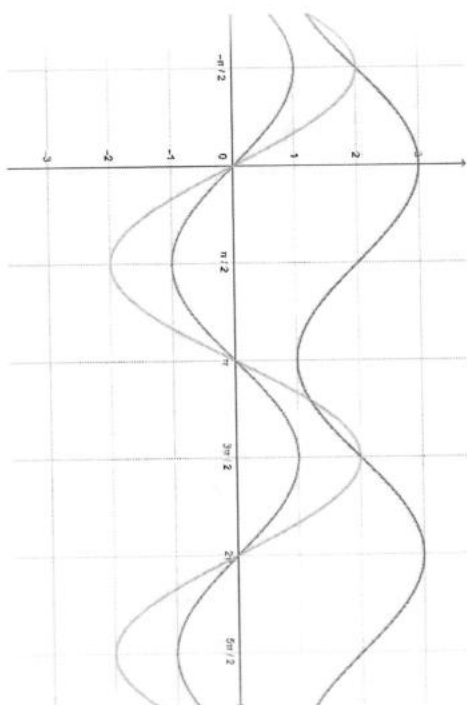
Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \sin(x + \pi)$$

$$g(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{2}) + 2$$

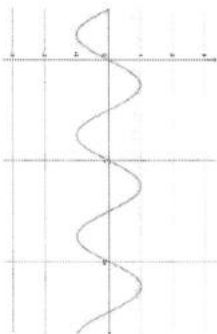
$$h(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{2})$$

Funktionsgraphen:

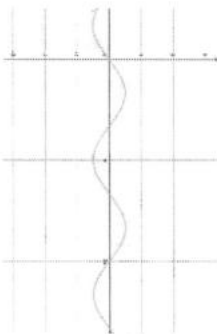


Aufgaben 3-6: Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

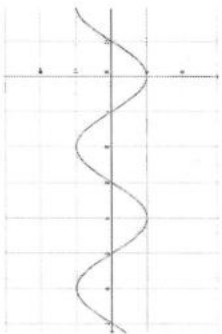
Aufgabe 3. $f(x) = \sin(2x)$



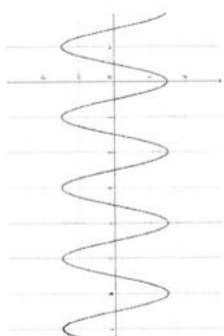
Aufgabe 4. $f(x) = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{2}x)$



Aufgabe 5. $h(x) = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)$



Aufgabe 6. $g(x) = \frac{3}{2} \cos(\pi \cdot x)$



26 Vektoren

26.1 Übungen

Aufgaben 1-4: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} =$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.

$$\vec{a} - \vec{b} =$$

Aufgabe 2.

$$2\vec{a} + \vec{b} =$$

Aufgabe 3.

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Aufgabe 4.

$$2\vec{b} - \vec{a} =$$

Aufgabe 5.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

$$|\vec{a} + \vec{b}| =$$

Aufgaben 6-8: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.

$$2\vec{b} - \vec{a} =$$

Aufgabe 7.

$$|\vec{a} - \vec{b}| =$$

Aufgabe 8.

$$3\vec{a} - 1,5\vec{b} =$$

Aufgabe 9.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

$$\vec{a} \circ \vec{b} =$$

26.2 Lösung

Aufgaben 1-4: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} =$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

$$2\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.

$$2\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Aufgaben 6-8: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.

$$2\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Aufgabe 8.

$$3\vec{a} - 1,5\vec{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

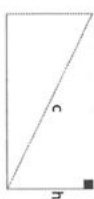
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 6 \cdot 5 + (-7) \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 42$$

27 Flächen und Umfänge

27.1 Übungen

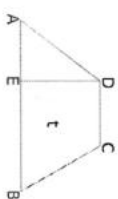
Aufgabe 1.

Die Diagonale $c = 13\text{cm}$ und die Höhe $h = 8\text{cm}$ eines Rechtecks sind gegeben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Rechtecks.



Aufgabe 2.

Gegeben für das Trapez $ABCD$ sind $AB = 8\text{cm}$, $AE = CD = 3\text{cm}$, $DE = 4\text{cm}$. Bestimmen Sie die Teilfläche t .



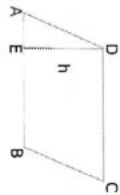
Aufgabe 3.

Das Volumen eines Würfels beträgt 27cm^3 . Bestimmen Sie die Oberfläche des Würfels.

Aufgabe 4.

Gegeben für das Parallelogramm $ABCD$ sind $AD = 50\text{cm}$, $CD = 100\text{cm}$ und $BE = 70\text{cm}$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A .



Aufgabe 5.

Der Umfang $u = 34\text{cm}$, die Höhe $h = 5\text{cm}$ und die Seite $b = 7\text{cm}$ eines Parallelograms sind gegeben.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Parallelograms.



Aufgabe 6.

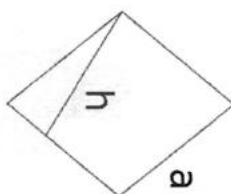
Die Seite $b = 68\text{cm}$ und der Umfang $u = 250\text{cm}$ eines Parallelograms sind gegeben. Wie lang ist die Seite a des Parallelograms?



Aufgabe 7.

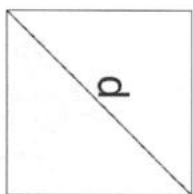
Gegeben ist eine Seitenlänge von $a = 28\text{cm}$ und eine Flächenhöhe von $h = 22\text{cm}$.

Berechnen Sie den Umfang u und den Flächeninhalt A der Raute.



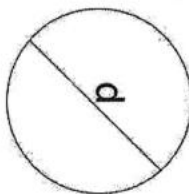
Aufgabe 8.

Die Diagonale d eines Quadrats beträgt 6cm . Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Quadrats.



Aufgabe 9.

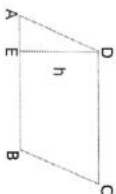
Diameter d eines Kreises beträgt 8cm. Bestimmen Sie den Umfang u und den Flächeninhalt A des Kreises.



Aufgabe 10.

Gegeben für das Parallelogramm $ABCD$ sind $CD = 300\text{cm}$, $h = 120\text{cm}$ und $BE = 210\text{cm}$.

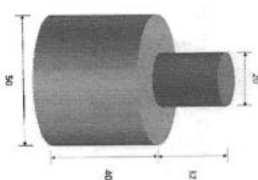
Bestimmen Sie den Umfang u .



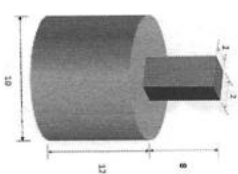
28 Körper und Figuren

28.1 Übungen

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche O des folgenden Körpers:



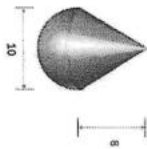
Aufgabe 2. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des folgenden Körpers:



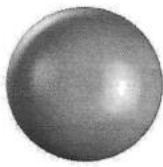
Aufgabe 3. Auf einer Halbkugel mit dem Radius $r = 3$ ist ein Kegel mit der Höhe $h = 8$. Berechnen Sie das gesamte Volumen des Körpers.



Aufgabe 4. Auf einer Halbkugel mit dem Radius $r = 5$ ist ein Kegel mit der Höhe $h = 8$. Berechnen Sie das gesamte Volumen des Körpers.

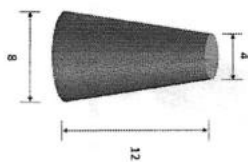


Aufgabe 5. Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $r = 3$. Berechnen Sie das Volumen der Kugel:

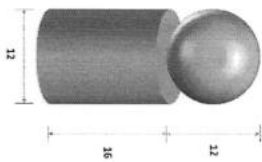


Aufgabe 6. Ein Kegel wurde an der Spitze abgeschnitten. Durch das Abschneiden der Spitze ist ein Kegelstumpf (unterer Teil des Kegels) entstanden. Welches Volumen hat der Kegelstumpf?

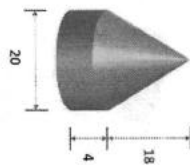
Hinweis: $V = \frac{h\pi}{3} \cdot ((r_1)^2 + r_1 \cdot r_2 + (r_2)^2)$



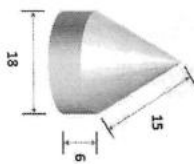
Aufgabe 7. Berechnen Sie das gesamte Volumen des folgenden Körpers:



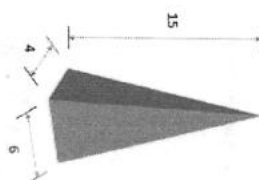
Aufgabe 8. Berechnen Sie das gesamte Volumen des folgenden Körpers:



Aufgabe 9. Berechnen Sie die Gesamthöhe des gegebenen Körpers sowie das gesamte Volumen:

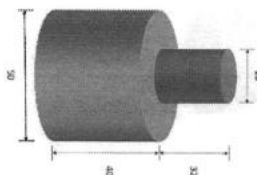


Aufgabe 10. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Körpers:



28.2 Lösung

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche O des folgenden Körpers:



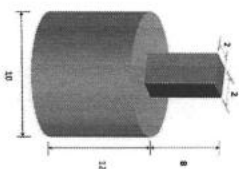
Lösung:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot 25^2 + \pi \cdot 50 \cdot 40 + \pi \cdot 20 \cdot 32$$

$$O = \pi(25^2 \cdot 2 + 50 \cdot 40 + 20 \cdot 32)$$

$$O = 3890\pi$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des folgenden Körpers:



Lösung:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 10 \cdot 12 + 64$$

$$O = \pi(5^2 \cdot 2 + 10 \cdot 12) + 64$$

$$O = 170\pi + 64$$

Aufgabe 3. Auf einer Halbkugel mit dem Radius $r = 3$ ist ein Kegel mit der Höhe

$h = 8$. Berechnen Sie das gesamte Volumen des Körpers:



Lösung:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{2\pi r^3 + \pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 (2r + h)}{3}$$

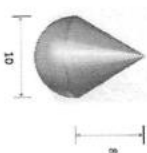
$$V = \frac{r^2 (2r + h)}{3} \cdot \pi$$

$$V = \frac{3^2 (2 \cdot 3 + 8)}{3} \cdot \pi$$

$$V = 12\pi$$

Aufgabe 4. Auf einer Halbkugel mit dem Radius $r = 5$ ist ein Kegel mit der Höhe

$h = 8$. Berechnen Sie das gesamte Volumen des Körpers:



Lösung:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{2\pi r^3 + \pi r^2 h}{3}$$

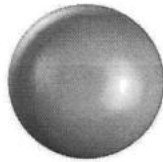
$$V = \frac{\pi r^2 (2r+h)}{3}$$

$$V = \frac{\pi^2 (2r+h)}{3} \cdot \pi$$

$$V = \frac{\pi^2 (25+9)}{3} \cdot \pi$$

$$V = 150\pi$$

Aufgabe 5. Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $r = 3$. Berechnen Sie das Volumen der Kugel:



Lösung:

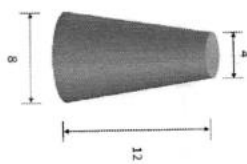
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$$

$$V = 36\pi$$

Aufgabe 6. Ein Kegel wurde an der Spitze abgeschnitten. Durch das Abschneiden der Spitze ist ein Kegelstumpf (unterer Teil des Kegels) entstanden. Welches Volumen hat der Kegelstumpf?

hinweis: $V = \frac{h\pi}{3} \cdot ((r_1)^2 + r_1 \cdot r_2 + (r_2)^2)$



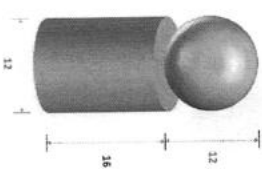
Lösung:

$$V = \frac{h\pi}{3} \cdot ((r_1)^2 + r_1 \cdot r_2 + (r_2)^2)$$

$$V = \frac{12\pi}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 8 + 8^2)$$

$$V = 112\pi$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie das gesamte Volumen des folgenden Körpers:



Lösung:

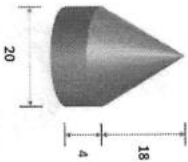
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \pi \cdot r^2 \left(\frac{4}{3}r + h \right)$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \left(\frac{4}{3} \cdot 6 + 16 \right)$$

$$V = 864\pi$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie das gesamte Volumen des folgenden Körpers:



Lösung:

$$V = \frac{\pi r^2 h_k}{3} + \pi \cdot r^2 \cdot h_z$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{3}h_k + h_z \right)$$

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 18 + 4 \right)$$

$$V = 1000\pi$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Gesamthöhe des gegebenen Körpers sowie das gesamte Volumen:

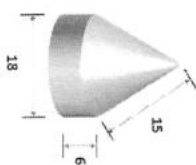
Lösung:

Seitenlinie s

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$h = 12$$



die Gesamthöhe: $12 + 6 = 18$

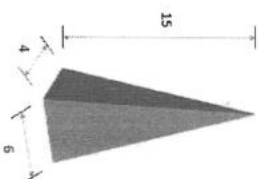
$$V = \frac{\pi r^2 h_k}{3} + \pi \cdot r^2 \cdot h_z$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{3}h_k + h_z \right)$$

$$V = \pi \cdot 9^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 12 + 6 \right)$$

$$V = 810\pi$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Körpers:



Lösung:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 15}{3}$$

$$V = 120$$

29 Ableitungen

29.1 Übungen

Aufgabe 1.

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 - 2$$

Aufgabe 2.

$$g(x) = x^3 + 5x + 6$$

Aufgabe 3.

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9x - 3$$

Aufgabe 4.

$$f(x) = x^3 \cdot x^2$$

Aufgabe 5.

$$f(x) = (x + 4)^3$$

Aufgabe 6.

$$f(x) = x^2 \cdot (x + 2)$$

Aufgabe 7.

$$f(x) = x^{m^2+2}$$

Aufgabe 8.

$$f(x) = (x^3 + 1) \cdot (x^3 - 1)$$

Aufgabe 9.

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Aufgabe 10.

$$f(x) = \frac{x}{x^2}$$

Aufgabe 11.

$$h(x) = \frac{1}{7-8x}$$

Aufgabe 12.

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

Aufgabe 13.

$$f(x) = -5x^{-3} + 9x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 14.

$$h(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Aufgabe 15.

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

Aufgabe 16.

$$f(x) = \sqrt{5x}$$

Aufgabe 17.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

Aufgabe 18.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Aufgabe 19.

$$f(x) = (2x^2 + 4x)^2$$

Aufgabe 20.

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

Aufgabe 21.

$$y(x) = \sin(2x)$$

Aufgabe 22.

$$g(x) = \cos^2 x$$

Aufgabe 23.

$$g(x) = \frac{1+x}{x}$$

Aufgabe 24.

$$y(x) = 2 \cdot \sin \frac{x}{2}$$

Aufgabe 25.

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2-1}$$

Aufgabe 26.

$$h(x) = 5 \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{5}$$

Aufgabe 27.

$$f(x) = \cos \sqrt{x^2+1}$$

Aufgabe 28.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(3^x)$$

29.2 Lösung

Aufgabe 1.

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 - 2$$

Lösung:

$$f(x) = 20x^3 - 6x^2$$

Aufgabe 2.

$$g(x) = x^3 + 5x + 6$$

Lösung:

$$g(x) = 3x^2 + 5$$

Aufgabe 3.

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9x - 3$$

Lösung:

$$y(x) = x^3 - 6x + 9$$

Aufgabe 4.

$$f(x) = x^3 \cdot x^2$$

Lösung:

$$f(x) = 5x^4$$

Aufgabe 5.

$$f(x) = (x+4)^3$$

Lösung:

$$f(x) = 3 \cdot (x+4)^2$$

Aufgabe 6.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+2)$$

Lösung:

$$f(x) = 3x^2 + 4x$$

Aufgabe 7.

$$f(x) = x^{m^2+2}$$

Lösung:

$$f(x) = (m^2+2) \cdot x^{m^2-1}$$

Aufgabe 8.

$$f(x) = (x^3+1) \cdot (x^3-1)$$

Lösung:

$$f(x) = 6x^3$$

Aufgabe 9.

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Aufgabe 10.

$$f(x) = \frac{2}{x^3}$$

Lösung:

$$f(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

Aufgabe 11.

$$h(x) = \frac{1}{7-8x}$$

Lösung:

$$h(x) = \frac{8}{(7-8x)^2}$$

Aufgabe 12.

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

Lösung:

$$f(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

Aufgabe 13.

$$f(x) = -5x^{-3} + 9x^{-\frac{1}{3}}$$

Lösung:

$$f(x) = 15x^{-4} - 3x^{-\frac{4}{3}}$$

Aufgabe 14.

$$h(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Lösung:

$$h(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

Aufgabe 15.

$$f(x) = (2x-1)^2$$

Lösung:

$$f(x) = 4(2x-1)$$

Aufgabe 16.

$$f(x) = \sqrt{5x}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

Aufgabe 17.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 18.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

Aufgabe 19.

$$f(x) = (2x^2 + 4x)^2$$

Lösung:

$$f(x) = 2(2x^2 + 4x)(4x + 4)$$

Aufgabe 20.

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

Aufgabe 21.

$$y(x) = \sin(2x)$$

Lösung:

$$y(x) = 2 \cos(2x)$$

Aufgabe 22.

$$g(x) = \cos^2 x$$

Lösung:

$$g(x) = -2 \cos x \cdot \sin(x) = -\sin(2x)$$

Aufgabe 23.

$$g(x) = \frac{1+x}{x^2}$$

Lösung:

$$g(x) = \frac{-(2+x)}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3}$$

Aufgabe 24.

$$y(x) = 2 \cdot \sin \frac{x}{2}$$

Lösung:

$$y(x) = \cos \frac{x}{2}$$

Aufgabe 25.

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2-1}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 26.

$$h(x) = 5 \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{6}$$

Lösung:

$$h(x) = \frac{\cos(\frac{\sqrt{x}}{2})}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 27.

$$f(x) = \cos \sqrt{x^2 + 1}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{-x \sin \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Aufgabe 28.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(3x)$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{2\sqrt{x}} + \ln(3) \cdot 3x\sqrt{x} \cdot \cos(3x)$$

30 Integralrechnung

30.1 Übungen

Aufgabe 1.

$$\int 1 dx =$$

Aufgabe 2.

$$\int 2x - 1 dx =$$

Aufgabe 3.

$$\int 4t^3 dt =$$

Aufgabe 4.

$$\int (x^2 - 4x) dx =$$

Aufgabe 5.

$$\int 2x^3 - 3x^2 dx =$$

Aufgabe 6.

$$\int \frac{1}{2} x(x^2 + 1) dx =$$

Aufgabe 7.

$$\int \sqrt{x} dx =$$

Aufgabe 8.

$$\int (5x^4 - 2x + 2) dx =$$

Aufgabe 9.

$$\int 4(x^3 + 2) dx =$$

Aufgabe 10.

$$\int \frac{1}{x^2} dx =$$

Aufgabe 11.

$$\int_1^3 x dx =$$

Aufgabe 12.

$$\int_{-1}^3 x^3 dx =$$

Aufgabe 13.

$$\int_{-2}^2 4t^3 dt =$$

Aufgabe 14.

$$\int_{-1}^1 (3x^2 - x + 4) dx =$$

Aufgabe 15.

$$\int_0^1 (4x^3 - x^2 + 2) dx =$$

Aufgabe 16.

$$\int_0^1 x^2(x - \frac{1}{2}) dx =$$

Aufgabe 17.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx =$$

Aufgabe 18.

$$K = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x) dx =$$

Aufgabe 19.

$$\int_0^1 x^3(2 - x) dx =$$

Aufgabe 20.

$$I = \int_0^1 e^x dx =$$

Aufgabe 21.

$$m = \int_0^2 \sqrt{2x} dx =$$

Aufgabe 22.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx =$$

Aufgabe 23.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx =$$

Aufgabe 24.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) + 1 dx =$$

Aufgabe 25.

$$\int_{-\pi}^{0.5\pi} \cos(x) dx =$$

30.2 Lösung

Aufgabe 1.

$$\int 1 dx =$$

Lösung:

$$x + c$$

Aufgabe 2.

$$\int 2x - 1 dx =$$

Lösung:

$$x^2 - x + c$$

Aufgabe 3.

$$\int 4t^3 dt =$$

Lösung:

$$x^3 + c$$

Aufgabe 4.

$$\int (x^2 - 4x) dx =$$

Lösung:

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + c$$

Aufgabe 5.

$$\int 2x^3 - 3x^2 dx =$$

Lösung:

$$\frac{x^4}{2} - x^3 + c$$

Aufgabe 6.

$$\int \frac{1}{2} x(x^2 + 1) dx =$$

Lösung:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) + c$$

Aufgabe 7.

$$\int \sqrt{x} dx =$$

Lösung:

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

Aufgabe 8.

$$\int (5x^4 - 2x + 2) dx =$$

Lösung:

$$x^5 - x^2 + 2x + c$$

Aufgabe 9.

$$\int 4(x^3 + 2) dx =$$

Lösung:

$$x^4 + 8x + c$$

Aufgabe 10.

$$\int \frac{1}{3x} dx =$$

Lösung:

$$\frac{1}{3} \ln |x| + c$$

Aufgabe 11.

$$\int_1^3 x dx =$$

Lösung:

$$4$$

Aufgabe 12.

$$\int_{-1}^3 x^3 dx =$$

Lösung:

$$20$$

Aufgabe 13.

$$\int_{-2}^2 4t^3 dt =$$

Lösung:

$$0$$

Aufgabe 14.

$$\int_{-1}^1 (3x^2 - x + 4) dx =$$

Lösung:

10

Aufgabe 15.

$$\int_0^1 (4x^3 - x^2 + 2) dx =$$

Lösung:

10/3

Aufgabe 16.

$$\int_0^1 x^2(x - \frac{1}{2}) dx =$$

Lösung:

$-\frac{1}{12}$

Aufgabe 17.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx =$$

Lösung:

$\frac{3}{4}$

Aufgabe 18.

$$K = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x) dx =$$

Lösung:

-2

Aufgabe 19.

$$\int_0^1 x^3(2-x) dx =$$

Lösung:

$\frac{3}{10}$

Aufgabe 20.

$$I = \int_0^1 e^x dx =$$

Lösung:

$e - 1$

Aufgabe 21.

$$m = \int_0^2 \sqrt{x} dx =$$

Lösung:

$\frac{8}{3}$

Aufgabe 22.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx =$$

Lösung:

-2

Aufgabe 23.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx =$$

Lösung:

0

Aufgabe 24.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) + 1 dx =$$

Lösung:

2π

Aufgabe 25.

$$\int_{-\pi}^{0.5\pi} \cos(x) dx =$$

Lösung:

1

$$\begin{cases} c = 7 - 2b \\ b = 3 \\ a = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} m - n - k = 0 \\ m + n - k = 4 \\ m + n + k = 6 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} m - n - k = 0 \\ m + n - k = 4 \\ m + n + k = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m = n + k \\ n + n + k - k = 4 \\ m + m = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m = n + k \\ 2n = 4 \\ 2m = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \\ 3 = 2 + k \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p+c} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{6} \\ + \\ \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p+c} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{p+c} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{p-c} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} p - c = 1 \\ \frac{2p}{p^2 - c^2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 1 + c \\ 16p = 5p^2 - 5c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 + c \\ 16(1 + c) = 5(1 + c^2) - 5c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 + c \\ 16 = 5 - 5c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + 16c = 10c + 5 \\ 16c - 10c = 5 - 16 \\ 6c = -11 \\ c = -\frac{11}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 + c \\ c = -1,5 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -0,5 \\ c = -1,5 \end{cases}$$

$$c = -\frac{11}{6}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} \frac{f+1}{3m-4} = \frac{1}{2} \\ \frac{5m+f}{3m+11} = 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 2(f+1) = 3m-4 \\ 5m+f = 3m+11 \end{cases} \quad \begin{cases} 2f+2-3m = -4 \\ 5m+f-3m = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 2f-3m = -6 \\ 2m+f = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 11 - 2m \\ 2(11 - 2m) - 3m = -6 \\ m = 4 \\ f = 11 - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} f = 11 - 2m \\ 22 - 4m - 3m = -6 \\ m = 4 \\ f = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} f = 11 - 2m \\ -7m = -6 - 22 \\ f = 11 - 2m \end{cases}$$

14 Textaufgaben

14.1 Übungen

Level A

Aufgabe 1.

Addiert man zum Dreifachen einer Zahl 4 und multipliziert die Summe mit 5, so erhält man 125.

Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 2.

Das neue Modell eines Smartphones ist 20% länger als das vorherige Modell und ist 14,4 cm lang. Welche Länge hat das vorherige Modell?

Aufgabe 3.

Sasha macht 150 Schritte jede 120 Meter. Wie viele Schritte würde er machen, wenn jeder sein Schritt 20 cm kürzer wäre?

Aufgabe 4.

Nicolas hat 2 Mal so viel Geld wie Peter. Die beiden sind einkaufen gegangen und müssen genauso viel für ihre Einkäufe bezahlen. Nach dem Einkauf haben sie insgesamt 150€. Wie viel Geld hatte jeder vor dem Einkauf, wenn sie insgesamt für 90€ eingekauft haben?

Aufgabe 5.

Alexander und Benedetta sind gemeinsam viermal so alt wie Benedetta. In 4 Jahren wird Alexander zweimal so alt wie Benedetta. Wie alt sind Alexander und Benedetta?

14.2 Lösung

Level A

Aufgabe 1.

Addiert man zum Dreifachen einer Zahl 4 und multipliziert die Summe mit 5, so erhält man 125.

Wie heißt die Zahl?

Lösung:

$$(3x + 4) \cdot 5 = 125$$

$$15x = 105$$

$$x = 7$$

Aufgabe 2.

Das neue Modell eines Smartphones ist 20% länger als das vorherige Modell und ist 14,4 cm lang. Welche Länge hat das vorherige Modell?

Lösung:

$$x + 0,2x = 14,4$$

$$1,2x = 14,4$$

$$x = 12$$

Aufgabe 3.

Sasha macht 150 Schritte jede 120 Meter. Wie viele Schritte würde er machen, wenn jeder sein Schritt 20 cm kürzer wäre?

Lösung:

$$1,150x = 120 \rightarrow x = 0,8 \text{ (0,8 Meter oder 80 cm)}$$

$$11,1) 0,8 - 0,2 = 0,6 \rightarrow 2) \frac{120}{0,6} = 200$$

Aufgabe 4.

Nicolas hat 2 Mal so viel Geld wie Peter. Die beiden sind einkaufen gegangen und müssen genauso viel für ihre Einkäufe bezahlen. Nach dem Einkauf haben sie insgesamt 150€. Wie viel Geld hatte jeder vor dem Einkauf, wenn sie insgesamt für 90€ eingekauft haben?

Lösung:

$$x + 2x - 90 = 150$$

$$3x = 240$$

$$x = 80 \Rightarrow 2x = 160$$

$$\text{Peter: } 80\text{€}$$

Niederle: 160€

Aufgabe 5.

Alexander und Benedetta sind gemeinsam viermal so alt wie Benedetta. In 4 Jahren wird Alexander zweimal so alt wie Benedetta. Wie alt sind Alexander und Benedetta?

Lösung:

$$\begin{cases} A + B = 4B \\ A + 4 = 2(B + 4) \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3B \\ 3B + 4 = 2B + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3B \\ B = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 12 \\ B = 4 \end{cases}$$

Alexander: 12

Benedetta: 4

15 Quadratische Gleichungen

15.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichung

Level A

Aufgabe 1.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Aufgabe 2.

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Aufgabe 3.

$$3y^2 = 10 - 29y$$

Aufgabe 4.

$$t^2 - 10t + 37 = 0$$

Aufgabe 5.

$$2p^2 - 4p - 17 = 0$$

Level B

Aufgabe 1.

$$0,7y^2 - 1,3y - 2 = 0$$

Aufgabe 2.

$$(t + 4)^2 = 3t + 40$$

Aufgabe 3.

$$(2p - 3)^2 = 11p - 19$$

Aufgabe 4.

$$3(f + 4)^2 = 10f + 32$$

Aufgabe 5.

$$(m + 1)^2 = (2m - 1)^2$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2$$

Aufgabe 2.

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} = 3\frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{1}{2-p} - 1 = \frac{1}{2-p} - \frac{6-p}{3p-12}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{k+3}{k-3} + \frac{k-3}{k+3} = 3\frac{1}{3}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{7f-3}{f-f^2} = \frac{1}{f-1} - \frac{5}{f(f-1)}$$

15.2 Lösung

Level A

Aufgabe 1.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Lösung:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Antwort: $x = 3$ **Aufgabe 2.**

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Lösung:

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -24$$

$$x_1 = -6,$$

$$x_2 = 4;$$

Antwort: $x_1 = -6; x_2 = 4$ **Aufgabe 3.**

$$3y^2 = 10 - 29y$$

Lösung:

$$3y^2 + 29y - 10 = 0$$

$$D = 29^2 + 4 \cdot 3 \cdot 10 = 841 + 120 = 961 = 31^2$$

$$y_1 = \frac{-29 - 31}{2 \cdot 3} = \frac{-60}{6} = -10$$

$$y_2 = \frac{-29 + 31}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Antwort: $y_1 = -10; y_2 = \frac{1}{3}$ **Aufgabe 4.**

$$t^2 - 10t + 37 = 0$$

Lösung:

$$t^2 - 10t + 37 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 37 = 100 - 148 = -48$$

Antwort: Keine Wurzeln**Aufgabe 5.**

$$2p^2 - 4p - 17 = 0$$

Lösung:

$$2p^2 - 4p - 17 = 0$$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 \cdot 17 = 16 + 136 = 152$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{152}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{152}}{4}$$

Antwort: $p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{152}}{4}$ **Level B****Aufgabe 1.**

$$0,7y^2 - 1,3y - 2 = 0$$

Lösung:

$$0,7y^2 - 1,3y - 2 = 0$$

$$D = (1,3)^2 + 4 \cdot 0,7 \cdot 2 = 1,69 + 5,6 = 7,29 = (2,7)^2$$

$$y_1 = \frac{1,3 - 2,7}{2 \cdot 0,7} = \frac{-1,4}{1,4} = -1$$

$$y_2 = \frac{1,3 + 2,7}{2 \cdot 0,7} = \frac{4}{1,4}$$

Antwort: $y_1 = -1; y_2 = \frac{4}{1,4}$ **Aufgabe 2.**

$$(t + 4)^2 = 3t + 40$$

Lösung:

$$t^2 + 8t + 16 - 3t - 40 = 0$$

$$t^2 + 5t - 24 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -5, \\ t_1 * t_2 = -24; \\ t_1 = - - 8, \\ t_2 = 3; \end{cases}$$

Antwort : $t_1 = -8; t_2 = 3$

Aufgabe 3.

$$(2p - 3)^2 = 11p - 19$$

Lösung:

$$4p^2 - 12p + 9 - 11p + 19 = 0$$

$$4p^2 - 23p + 28 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 * 4 * 28 = 529 - 448 = 81 = 9^2$$

$$p_1 = \frac{23-9}{2*4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$p_2 = \frac{23+9}{2*4} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\text{Antwort : } p_1 = \frac{7}{4}; p_2 = 4$$

Aufgabe 4.

$$3(f + 4)^2 = 10f + 32$$

Lösung:

$$3(f^2 + 8f + 16) - 10f - 32 = 0$$

$$3f^2 + 24f + 48 - 10f - 32 = 0$$

$$3f^2 + 14f + 16 = 0$$

$$D = 14^2 - 4 * 3 * 16 = 169 - 192 = -23$$

Antwort : keine Wurzeln

Aufgabe 5.

$$(m + 1)^2 = (2m - 1)^2$$

Lösung:

$$m^2 + 2m + 1 = 4m^2 - 4m + 1$$

$$m^2 - 4m^2 + 2m + 4m + 1 - 1 = 0$$

$$-3m^2 + 6m = 0$$

$$-3m(m - 2) = 0$$

$$-3m = 0,$$

$$m - 2 = 0;$$

$$m = 0,$$

$$m = 2;$$

$$\text{Antwort : } m_1 = 0; m_2 = 2$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2$$

Lösung:

$$ODZ : x \neq 5; x \neq -5$$

$$\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2 / * (x-5)(x+5)$$

$$(x-4)(x+5) + (x-6)(x-5) = 2(x+5)(x-5)$$

$$x^2 + 5x - 4x - 20 + x^2 - 5x - 6x + 30 = 2(x^2 - 25)$$

$$2x^2 - 10x + 10 = 2x^2 - 50$$

$$-10x + 60 = 0$$

$$-10x = -60$$

$$x = 6$$

$$\text{Antwort : } x = 6$$

Aufgabe 2.

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} = 3\frac{1}{3}$$

Lösung:

$$ODZ: t \neq 3; t \neq -3$$

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} = 3\frac{1}{2} / * (t-3)(t+3)$$

$$(t+3)(t+3) + (t-3)(t-3) = 3\frac{1}{2} * (t-3)(t+3)$$

$$(t+3)^2 + (t-3)^2 = 3\frac{1}{2} * (t^2 - 9)$$

$$t^2 + 6t + 9 + t^2 - 6t + 9 = \frac{19}{2}t^2 - 30 / * 2$$

$$2t^2 + 3t^2 + 27 + 27 - 19t^2 + 90 = 0$$

$$-4t^2 + 144 = 0 / : 4$$

$$-t^2 + 36 = 0$$

$$t^2 = 36$$

$$t = \pm 4$$

$$\text{Antwort: } t = \pm 4$$

Aufgabe 3.

$$\frac{1}{2-p} - 1 = \frac{1}{2-p} - \frac{6-p}{3p-12}$$

Lösung:

$$-\frac{1}{p-2} - 1 = \frac{1}{p-2} - \frac{6-p}{3(p-2)(p+2)} / * 3(p-2)(p+2)$$

$$-3(p+2) - 3(p-2)(p+2) - 3(p+2) + 6 - p = 0$$

$$-3p - 6 - 3p^2 + 12 - 3p - 6 + 6 - p = 0$$

$$-3p^2 - 7p + 6 = 0 / : (-1)$$

$$3p^2 + 7p - 6 = 0$$

$$D = 7^2 + 4 * 2 * 6 = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

$$x_1 = \frac{-7 \pm 11}{2 * 3} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$x_2 = \frac{-7 \pm 11}{2 * 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Antwort: } x_1 = -3; x_2 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{k+3}{k-3} + \frac{k-3}{k+3} = 3\frac{1}{2}$$

Lösung:

$$ODZ: k \neq 3; k \neq -3$$

$$(k+3)^2 + (k-3)^2 = \frac{19}{2} * (k-3)(k+3) / * 2$$

$$3(k+3)^2 + 3(k-3)^2 = 19(k-3)(k+3)$$

$$3(k^2 + 6k + 9) + 3(k^2 - 6k + 9) = 19(k^2 - 9)$$

$$3k^2 + 12k + 27 + 3k^2 - 6k + 27 - 19k^2 + 90 = 0$$

$$-4k^2 + 144 = 0 / : (-4)$$

$$k^2 = 36$$

$$k = \pm 6$$

$$\text{Antwort: } k = \pm 6$$

Aufgabe 5.

$$\frac{7f-3}{f-2} = \frac{1}{f-1} - \frac{5}{f(f-1)}$$

Lösung:

$$ODZ: f \neq 0; f \neq 1$$

$$\frac{7f-3}{f-2} = \frac{1}{f-1} - \frac{5}{f(f-1)} / * f(f-1)$$

$$-(7f-3) = f-5$$

$$-7f + 3 - f + 5 = 0$$

$$-8f + 8 = 0$$

$$-8f = -8$$

$$f = 1$$

$$\text{Antwort: } f = 1$$

16 Polynomgleichungen

17 Exponentialgleichungen

17.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichung

Level A

Aufgabe 1.

$$3^{2x-4} = 729$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 3.

$$5^{f^2+3f} = 5^{3f-8}$$

Aufgabe 4.

$$6^{3x+4} = 6^{x-7}$$

Aufgabe 5.

$$7^{y^2-3y} = 1$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = 2^{-7}$$

Aufgabe 2.

$$4^y + 2^{y+1} - 24 = 0$$

Aufgabe 3.

$$\frac{0,2^{k-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{k-2}$$

Aufgabe 4.

$$5^{2m-1} + 5^{m+1} = 250$$

Aufgabe 5.

$$3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{n+2} = 21$$

Level C

Aufgabe 1.

$$2^{2(x+\sqrt{x-2})} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x-2}} = 6$$

Aufgabe 2.

$$\sqrt[5]{64} - \sqrt[5]{28y+3} + 12 = 0$$

Aufgabe 3.

$$9 \cdot 27^{f-\frac{3}{2}} - \frac{2}{81} \cdot 9^{f+2} = 9$$

Aufgabe 4.

$$5^{m+1} - 13 \cdot 15^m + 54 \cdot 9^{m-1} = 0$$

Aufgabe 5.

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^n = 4$$

17.2 Lösung

Level A

Aufgabe 1.

$$3^{2x-4} = 729$$

Lösung:

$$3^{2x-4} = 3^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$2x = 6 + 4$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2t-3,5} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2t-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2t - 3,5 = 0,5$$

$$2t = 0,5 + 3,5$$

$$2t = 4$$

$$t = 2$$

Aufgabe 3.

$$5f^2 + 3f = 5^3f - 8$$

Lösung:

$$5f^2 + 3f = 5^3f - 8$$

$$f^2 + 3f = 3f - 8$$

$$f^2 + 3f - 3f + 8 = 0$$

$$f^2 + 8 = 0$$

$$f^2 = -8$$

Antwort: kein Wurzel

Aufgabe 4.

$$6^{3x+4} = 6^{x-7}$$

Lösung:

$$6^{3x+4} = 6^{x-7}$$

$$3x + 4 = x - 7$$

$$3x - x + 4 + 7 = 0$$

$$2x + 11 = 0$$

$$2x = -11$$

$$x = -5,5$$

Aufgabe 5.

$$7t^2 - 3y = 1$$

$$7t^2 - 3y = 7^0$$

Lösung:

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y(y - 3) = 0$$

$$y = 0,$$

$$y - 3 = 0;$$

$$y = 0,$$

$$y = 3.$$

Antwort: $y_1 = 0; y_2 = 3$

Level B

Aufgabe 1.

$$\sqrt[3]{2-1} * 2^{x^2-7,5} = 2^{-7}$$

Lösung:

$$2^{-\frac{1}{3}} * 2^{x^2-7,5} = 2^{-7}$$

$$-\frac{1}{3} + x^2 - 7,5 + 7 = 0 / * 2$$

$$-1 + 2x^2 - 15 + 14 = 0$$

$$2x^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Antwort: $x = \pm 1$

Aufgabe 2.

$$4^p + 2^{p+1} - 24 = 0$$

Lösung:

$$(2^2)^y + 2^y * 2^1 - 24 = 0$$

$$\text{Angenommen } 2^y = t, t > 0$$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -2;$$

$$t_1 * t_2 = -24;$$

$$t_1 = -6(\neq t);$$

$$t_2 = 4;$$

$$2^y = 4$$

$$2^y = 2^2$$

$$y = 2$$

$$\text{Antwort: } y = 2$$

Aufgabe 3.

$$\frac{0,2^{k-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 * 0,04^{k-2}$$

Lösung:

$$\frac{1}{5}^{k-0,5} : 50^5 = 5 * \left(\frac{1}{25}\right)^{k-2}$$

$$5^{0,5-k-0,5} = 5 - (5^{-2})^{k-2}$$

$$5^{-k} = 5^{1-2k+4}$$

$$5^{-k} = 5^{5-2k}$$

$$-k = 5 - 2k$$

$$-k + 2k = 5$$

$$k = 5$$

$$\text{Antwort: } k = 5$$

Aufgabe 4.

$$5^{2m-1} + 5^{m+1} = 250$$

Lösung:

$$5^{2m} : 5^1 + 5^m * 5^1 = 250$$

$$\text{Angenommen } 5^m = t, t > 0$$

$$\frac{t^2}{5} + 5t - 250 = 0 / * 5$$

$$t^2 + 25t - 1250 = 0$$

$$D = 25^2 + 4 * 1 * 1250 = 5625 = 75^2$$

$$t_1 = \frac{-25-75}{2*1} = \frac{-100}{2} = -50(\neq t)$$

$$t_2 = \frac{-25+75}{2*1} = \frac{50}{2} = 25$$

$$5^m = 25$$

$$5^m = 5^2$$

$$m = 2$$

$$\text{Antwort: } m = 2$$

Aufgabe 5.

$$3^{2n+1} + 2 * 3^{n+2} = 21$$

Lösung:

$$3^{2n} * 3^1 + 2 * 3^n * 3^2 = 21$$

$$\text{Angenommen } 3^n = t, t > 0$$

$$3t^2 + 18t - 21 = 0 / : 3$$

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -6,$$

$$t_1 * t_2 = -7;$$

$$t_1 = -7(\neq t),$$

$$t_2 = 1;$$

$$3^n = 1$$

$$3^n = 3^0$$

$$n = 0$$

Antwort: $n = 0$

Level C

Aufgabe 1.

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$$

Lösung:

$$\text{Pust } 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t, t > 0$$

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0 / * 2$$

$$2t^2 - 5t - 12 = 0$$

$$D = 5^2 + 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25 + 96 = 121 = 11^2$$

$$t_1 = \frac{5+11}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$t_2 = \frac{5-11}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -1,5 (\notin \mathbb{R})$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$$

$$x + \sqrt{x^2-2} = 2$$

$$\sqrt{x^2-2} = 2 - x$$

$$(\sqrt{x^2-2})^2 = (2-x)^2$$

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 2 - 4 + 4x - x^2 = 0$$

$$4x - 6 = 0$$

$$4x = 6$$

$$x = 1,5$$

Antwort: $x = 1,5$

Aufgabe 2.

$$\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{23y+3} + 12 = 0$$

Lösung:

$$2^{\frac{6}{3}} - 2^{\frac{3y+3}{3}} + 12 = 0$$

$$2^2 - 2^{3+\frac{y}{3}} + 12 = 0$$

$$2^{\frac{6}{3}} - 8 \cdot 2^{\frac{y}{3}} + 12 = 0$$

$$\text{Pust } 2^{\frac{y}{3}} = t, t > 0$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$-t_1 + t_2 = 8;$$

$$t_1 \cdot t_2 = 12;$$

$$t_1 = 2,$$

$$t_2 = 6;$$

$$2^{\frac{y}{3}} = 2,$$

$$2^{\frac{y}{3}} = 2^1;$$

$$\frac{y}{3} = 1,$$

$$y = 3;$$

$$\frac{3}{y} = \log_2 6;$$

$$y = 3.$$

$$y = \frac{3}{\log_2 6};$$

$$\text{Antwort: } y_1 = 3; y_2 = \frac{3}{\log_2 6}$$

Aufgabe 3.

$$9 \cdot 27^t - \frac{2}{81} \cdot 9^{t+2} = 9$$

Lösung:

$$9 \cdot \frac{27^t}{27^4} - \frac{2}{81} \cdot 9^t \cdot 9^2 = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^t}{9} - 2 \cdot 9^t = 9$$

$$27^t - 2 \cdot 9^t = 9$$

$$\text{Pust } 3^t = t, t > 0$$

$$t^3 - 2t^2 - 9 = 0; 3t^2 - 3t^2 + t^2 - 9 = 0$$

$$t^2(t-3) + (t-3)(t+3) = 0$$

$$(t-3)(t^2+t+3) = 0$$

$$t = 3,$$

$$\begin{cases} t^2+t+3=0 (t \notin \mathbb{R}); \\ 3t=3 \end{cases}$$

$$f = 1$$

Antwort : $f = 1$

Aufgabe 4.

$$5^{m+1} - 13 \cdot 15^m + 54 \cdot 9^{m-1} = 0$$

Lösung:

$$5^{2m} \cdot 5^1 - 13 \cdot 3^m \cdot 5^m + 54 \cdot \frac{9^m}{9} = 0$$

$$5^{2m} \cdot 5^1 - 13 \cdot 3^m \cdot 5^m + 6 \cdot 9^m = 0 / : 9^m$$

$$\frac{5 \cdot 5^{2m}}{9^m} - \frac{13 \cdot 3^m}{9^m} + \frac{6 \cdot 9^m}{9^m} = 0$$

$$5(\frac{5}{3})^{2m} - 13(\frac{3}{3})^m + 6 = 0$$

$$P_{ust}(\frac{5}{3})^m = t, t > 0$$

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49 = 7^2$$

$$t_1 = \frac{13-7}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$t_2 = \frac{13+7}{2 \cdot 5} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^m = \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^m = 2;$$

$$m = -1,$$

$$m = \log_3 2.$$

Antwort : $m_1 = -1; m_2 = \log_3 2$

Aufgabe 5.

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^n = 4$$

Lösung:

Angenommen $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n = t, t > 0$, dann $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^n = \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n} = \frac{1}{t}$

$$t + \frac{1}{t} = 4 / * t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n = 2 + \sqrt{3},$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n = 2 - \sqrt{3};$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^n = (2+\sqrt{3})^{-1};$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{\frac{n}{2}} = 2 + \sqrt{3};$$

$$\frac{n}{2} = -1,$$

$$\frac{n}{2} = 1;$$

$$n = -2,$$

$$n = 2;$$

Antwort : $n = \pm 2$

18 Logarithmusgleichungen

18.1 Übungen

Lösen Sie die Gleichung

Level A

Aufgabe 1.

$$\log_2(4-a) = 7$$

Aufgabe 2.

$$\log_5(4 + y) = 2$$

Aufgabe 3.

$$\log_7(15 + x) = \log_7 3$$

Aufgabe 4.

$$\log_{\frac{1}{4}}(7 - m) = -2$$

Aufgabe 5.

$$\log_5(7 - x) = \log_5 5(3 - x)$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\log_4(x^2 + x - 5) = -1$$

Aufgabe 2.

$$3\log_{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}} = \log_2 y$$

Aufgabe 3.

$$\log_{0.5}(4a - 1) - \log_{\frac{1}{4}}(7a - 3) = 1$$

Aufgabe 4.

$$\log_3 m + \log_3(m - 3) = 2$$

Aufgabe 5.

$$\log_8 2^{8n-4} = 4$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

Aufgabe 2.

$$\log_2(y + 4) + \log_2(2y + 3) = \log_2(1 - 2y)$$

Aufgabe 3.

$$\log_{m+4}(m^2 - 1) = \log_{m+4}(5 - m)$$

Aufgabe 4.

$$\lg^2 n + \lg n + 1 = \frac{7}{\lg \frac{10}{8}}$$

Aufgabe 5.

$$\log_{0.1} y + \log_{0.2} y = 0$$

18.2 Lösung

Lösungen Level A

Aufgabe 1.

$$\log_2(4 - a) = 7$$

Lösung:

$$\log_2(4 - a) = 7$$

$$\log_2(4 - a) = 7 \log_2 2$$

$$\log_2(4 - a) = \log_2 2^7$$

$$4 - a = 2^7$$

$$4 - a = 128$$

$$-a = 128 - 4$$

$$a = -124$$

Antwort: $a = -124$

Aufgabe 2.

$$\log_3(4 + y) = 2$$

Lösung:

$$\log_3(4 + y) = 2 \cdot \log_3 5$$

$$\log_3(4 + y) = \log_3 5^2$$

$$4 + y = 5^2$$

$$4 + y = 25$$

$$y = 25 - 4y = 21$$

$$\text{Antwort: } y = 21$$

Aufgabe 3.

$$\log_7(15 + x) = \log_7 3$$

Lösung:

$$\log_7(15 + x) = \log_7 3$$

$$15 + x = 3$$

$$x = -15 + 3$$

$$x = -12$$

$$\text{Antwort: } x = -12$$

Aufgabe 4.

$$\log_4(7 - m) = -2$$

Lösung:

$$\log_4(7 - m) = -2 * \log_4 * \frac{1}{2}$$

$$\log_4(7 - m) = \log_4 * \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\log_4(7 - m) = \log_4 * 49$$

$$7 - m = 49$$

$$-m = -7 + 49$$

$$-m = 42$$

$$m = -42$$

$$\text{Antwort: } m = -42$$

Aufgabe 5.

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x)$$

Lösung:

$$\log_5(7 - x) = \log_5(15 - 5x)$$

$$7 - x = 15 - 5x$$

$$5x - x = 15 - 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$\text{Antwort: } x = 2$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\log_4(x^2 + x - 5) = -1$$

Lösung:

$$\log_4(x^2 + x - 5) = -1 * \log_4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_4(x^2 + x - 5) = \log_4\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x^2 + x - 5 = 7$$

$$x^2 + x - 5 - 7 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -1,$$

$$x_1 * x_2 = -12;$$

$$x_1 = -4,$$

$$x_2 = 3;$$

$$\text{Antwort: } x_1 = -4, x_2 = 3$$

Aufgabe 2.

$$\log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 y$$

Lösung:

$$\log_2\left(\frac{1}{2} * \frac{32}{1}\right) = \log_2 y$$

$$\log_2 16^3 = \log_2 y$$

$$16^3 = y$$

$$4096 = y$$

$$\text{Antwort : } y = 4096$$

Aufgabe 3.

$$\log_{0,5}(4a-1) - \log_{\frac{1}{2}}(7a-3) = 1$$

Lösung:

$$\log_{0,5}(4a-1) - \log_{0,5}(7a-3) = \log_{0,5}0,5$$

$$\log_{0,5}\left(\frac{4a-1}{7a-3}\right) = \log_{0,5}0,5$$

$$\frac{4a-1}{7a-3} = 0,5$$

$$4a-1 = 0,5(7a-3)$$

$$4a-1 = 3,5a-1,5$$

$$4a-3,5a = 1-1,5$$

$$0,5a = -0,5$$

$$a = -1$$

$$\text{Antwort : } a = -1$$

Aufgabe 4.

$$\log_3 m + \log_3(m-3) = 2$$

Lösung:

$$\log_3 m + \log_3(m-3) = \log_3 3^2$$

$$\log_3 m(m-3) = \log_3 9$$

$$m^2 - 3m = 9$$

$$m^2 - 3m - 9 = 0$$

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 9 = 9 + 36 = 45 = (3\sqrt{5})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Antwort : } \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Aufgabe 5.

$$\log_8 2^{8n-4} = 4$$

Lösung:

$$\frac{1}{3} \log_2 2^{8n-4} = 4$$

$$\frac{1}{3}(8n-4) = 4$$

$$8n-4 = 12$$

$$8n = 12+4$$

$$8n = 16$$

$$n = 2$$

$$\text{Antwort : } n = 2$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\log_3(x^2-3x-5) = \log_3(7-2x)$$

Lösung:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$ODZ : x < 3,5$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -12;$$

$$x_1 = 4 (\notin ODZ),$$

$$x_2 = -3;$$

$$\text{Antwort : } x = 3$$

Aufgabe 2.

$$\log_2(y+4) + \log_2(2y+3) = \log_2(1-2y)$$

Lösung:

$$\log_2(y+4)(2y+3) = \log_2(1-2y)$$

ODZ:

$$\begin{cases} y+4 > 0, \\ 2y+3 > 0, \Leftrightarrow \\ 1-2y > 0; \end{cases} \begin{cases} y > 4, \\ y > 1,5, \\ y < 0,5; \end{cases}$$

$$(y+4)(2y+3) = 1-2y$$

$$2y^2 + 3y + 8y + 12 = 1 - 2y$$

$$2y^2 + 11y + 2y + 12 - 1 = 0$$

$$2y^2 + 13y + 11 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = 169 - 88 = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-13 \pm 9}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-13 - 9}{2 \cdot 2} = \frac{-22}{4} = -5,5$$

$$\text{Antwort: } x_1 = -1; x_2 = -5,5$$

Aufgabe 3.

$$\log_{m+4}(m^2-1) = \log_{m+4}(5-m)$$

Lösung:

ODZ:

$$\begin{cases} m^2-1 > 0, \\ 5-m > 0, \Leftrightarrow \\ m+4 > 0, \end{cases} \begin{cases} m > \pm 1, \\ m < 5, \\ m > -4. \end{cases}$$

$$m+4 \neq 1;$$

$$m^2-1 = 5-m$$

$$m^2+m-1-5=0$$

$$m^2+m-6=0$$

$$m_1 + m_2 = -1,$$

$$m_1 \cdot m_2 = -6;$$

$$m_1 = -3 (\notin \text{ODZ}),$$

$$m_2 = 2;$$

$$\text{Antwort: } m = 2$$

Aufgabe 4.

$$\lg^2 n + \lg n + 1 = \frac{7}{\lg \frac{7}{10}}$$

Lösung:

$$\lg^2 n + \lg n + 1 = \frac{7}{\lg \frac{7}{10}}$$

Angenommen $\lg n = t$, wo $t \neq 1$, dann

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t-1}$$

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

$$\lg n = 2$$

$$n = 10^2$$

$$n = 100$$

$$\text{Antwort: } n = 100$$

Aufgabe 5.

$$\log_{0,1} y + \log_{0,2} y = 0$$

Lösung:

ODZ:

$$\begin{cases} 0, 1y \neq 1, \\ 0, 2y \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 5, \\ y > 0; \end{cases} \begin{cases} y \neq 10, \\ y \neq 5, \\ y > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1} y = \frac{\lg y}{\lg 0,1} = \frac{\lg y}{-1 + \lg y}$$

$$\log_{0,2} y = \frac{\lg y}{\lg 0,2} = \frac{\lg y}{-\lg 5 + \lg y}$$

$$\frac{\lg y}{-1 + \lg y} + \frac{\lg y}{-\lg 5 + \lg y} = 0$$

Angenommen

$\lg y = t$, wo

$t \neq 1; t \neq \lg 5$

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t-\lg 5} = 0$$

$$t(t - \lg 5) + t(t - 1) = 0$$

$$t = \lg y = 0, \quad \begin{cases} y = 1, \\ y = 5\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$t = \lg y = \lg \sqrt{50}; \Leftrightarrow y = 5\sqrt{2};$$

Antwort: 1, $5\sqrt{2}$

19 Ungleichungen

19.1 Übungen

Lösen Sie die Ungleichung

Übung Level A

Aufgabe 1.

$$(x-4)(x+7) > 0$$

Aufgabe 2.

$$(x+1)(x+4)(x-2) \leq 0$$

Aufgabe 3.

$$(y+4)(3y-2)(9-y) \geq 0$$

Aufgabe 4.

$$z^2 + 7z \leq 30$$

Aufgabe 5.

$$3f - f^2 > -40$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(2-x)(x^2-9) < 0$$

Aufgabe 2.

$$(y^2-1)(4-y) > 0$$

Aufgabe 3.

$$\frac{2k-1}{k} > 1$$

Aufgabe 4.

$$\frac{2z-1}{z+1} < -1$$

Aufgabe 5.

$$\frac{3n+2}{4} - \frac{n-3}{2} > 3$$

Level C

Aufgabe 1.

$$2x - 7 \geq 0,$$

$$x^2 - 7x + 12 \leq 0;$$

Aufgabe 2.

$$3y - 8 \geq 0,$$

$$y^2 - 3y + 2 \geq 0;$$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} 5m - (m - 5 \leq 13), \\ m < 3(5m - 1) + 17, \end{cases}$$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} 3n - (n - 1) \leq 19, \\ n < 2(3n - 1) + 2, \end{cases}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} f + 1 \leq 0, \\ 2f^2 - 18 \leq 0; \end{cases}$$

19.2 Lösung

Level A

Aufgabe 1.

$$(x - 4)(x + 7) > 0$$

Lösung:

$$x = 4,$$

$$x = -7.$$

Aufgabe 2.

$$(x + 1)(x + 4)(x - 2) \leq 0$$

Lösung:

$$x = -1,$$

$$x = -4,$$

$$x = 2;$$

Aufgabe 3.

$$(y + 4)(3y - 2)(9 - y) \geq 0$$

Lösung:

$$x = -4,$$

$$x = \frac{2}{3},$$

$$x = 9;$$

Aufgabe 4.

$$z^2 + 7z \leq 30$$

Lösung:

$$z^2 + 7z - 30 \leq 0$$

$$z^2 + 7z - 30 = 0$$

$$z_1 + z_2 = -7,$$

$$z_1 * z_2 = -30;$$

$$z_1 = -10,$$

$$z_2 = 3.$$

Aufgabe 5.

$$3f - f^2 > -40$$

Lösung:

$$-f^2 + 3f + 40 > 0 / * (-1)$$

$$f^2 - 3f + 40 > 0$$

$$f^2 - 3f + 40 = 0$$

$$f_1 + f_2 = 3,$$

$$f_1 * f_2 = -40.$$

$$f_1 = 8,$$

$$f_2 = -5.$$

Level B

Aufgabe 1.

$$(2 - x)(x^2 - 9) < 0$$

Lösung:

$$(2-x)(x-3)(x+3) < 0$$

$$(2-x)(x-3)(x+3) = 0$$

$$x = 2,$$

$$x = 3,$$

$$x = -3;$$

Aufgabe 2.

$$(y^2 - 1)(4 - y) > 0$$

Lösung:

$$(y-1)(y+1)(4-y) > 0$$

$$-(y-1)(y+1)(y-4) > 0 / * (-1)$$

$$(y-1)(y+1)(y-4) > 0$$

$$x = 1,$$

$$x = -1,$$

$$x = 4;$$

Aufgabe 3.

$$\frac{2k-1}{k} > 1$$

Lösung:

$$\frac{2k-1}{k} - 1 > 0$$

$$\frac{2k-1-k}{k} > 0$$

$$k(k-1) > 0$$

Aufgabe 4.

$$\frac{2z-1}{z+1} < -1$$

Lösung:

$$\frac{2z-1}{z+1} + 1 < 0$$

$$\frac{z^2-1}{z+1} < 0$$

$$\frac{z^2-1}{z+1} < 0$$

$$z(z+1) < 0$$

$$z = 0,$$

$$z = -1;$$

Aufgabe 5.

$$\frac{3n+2}{4} - \frac{n-3}{2} > 3$$

Lösung:

$$\frac{3n+2}{4} - \frac{n-3}{2} > 3 / * 4$$

$$(3n+2) - 2(n-3) > 12$$

$$3n+2-2n+6 > 12$$

$$n+8 > 12$$

$$n > 4$$

Level C

Aufgabe 1.

$$\begin{cases} 2x-7 \geq 0, \\ x^2-7x+12 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-7 \geq 0, \\ x^2-7x+12 \leq 0; \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 2x-7 \geq 0(1), \\ x^2-7x+12 \leq 0(2); \end{cases}$$

$$(1) 2x-7 \geq 0$$

$$2x \geq 7$$

$$x \geq 3,5$$

$$(2) x^2-7x+12 \leq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 * x_2 = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, 5; \\ x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [3, 5; +\infty), \\ x \in [3, 4]. \end{cases}$$

Antwort : $x \in [3, 5; 4]$

Aufgabe 2.

$$\begin{cases} 3y - 8 \geq 0, \\ y^2 - 3y + 2 \geq 0; \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 3y - 8 \geq 0(1), \\ y^2 - 3y + 2 \geq 0(2); \end{cases}$$

$$(1) 3y - 8 \geq 0$$

$$y \geq \frac{8}{3}$$

$$(2) y^2 - 3y + 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3, \\ y_1 * y_2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{8}{3}, \\ y_1 = 2, \\ y_2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [\frac{8}{3}; +\infty), \\ y \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty). \end{cases}$$

Antwort : $y \in [\frac{8}{3}; +\infty)$

Aufgabe 3.

$$\begin{cases} 5m - (m - 5 \leq 13), \\ m < 3(5m - 1) + 17; \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 5m - (m - 5 \leq 13), \\ m < 3(5m - 1) + 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - m + 5 \leq 13, \\ m < 15m - 3 + 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \leq 8, \\ -14m < 14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2, \\ m > -1. \end{cases}$$

Antwort : $m \in (-1; 2]$

Aufgabe 4.

$$\begin{cases} 3n - (n - 1) \leq 19, \\ n < 2(3n - 1) + 2; \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} 3n - n + 1 \leq 19, \\ n < 6n - 2 + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \leq 19 - 1, \\ n < 6n; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \leq 18, \\ -5n < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 9, \\ n > 0; \end{cases}$$

Antwort : $n \in (0; 9]$

Aufgabe 5.

$$\begin{cases} f + 1 \leq 0, \\ 2f^2 - 18 \leq 0; \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} f \leq -1, \\ 2f^2 \leq 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq -1, \\ f^2 \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq -1, \\ f^2 \leq \pm 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq -1, \\ -3 \leq f \leq 3. \end{cases}$$

Antwort : $f \in [-3; -1]$

20 Betragsungleichungen

20.1 Übungen

Lösen Sie die Ungleichung

Level A

Aufgabe 1.

$$|6 + 4x| \leq 14$$

Aufgabe 2.

$$|3y - 5| < 4$$

Aufgabe 3.

$$|z - 8| \geq 3$$

Aufgabe 4.

$$|f + 4| > 4$$

Aufgabe 5.

$$|2n - 1| < 9$$

Level B

Aufgabe 1.

$$2 \leq |2x - 4| \leq 10$$

Aufgabe 2.

$$|y + 1| \leq |y - 2|$$

Aufgabe 3.

$$|2m + 1| \geq 2m^2 + 1$$

Aufgabe 4.

$$|5a + 3| < |2a - 1|$$

Aufgabe 5.

$$|y^2 + 4y - 5| \leq y^2 + 4y - 5$$

Level C

Aufgabe 1.

$$|x^2 + 4x| + |-x^2 + 9| \geq (4x + 9)$$

Aufgabe 2.

$$\left| \frac{y^2 - 3y - 1}{y^2 + y + 1} \right| < 3$$

Aufgabe 3.

$$\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| < 1$$

Aufgabe 4.

$$|(a+1)^{-1} - (a+6)^{-1}|^2 \leq \frac{|a^2 - 10a|}{(a^2 + 7a + 6)^2}$$

Aufgabe 5.

$$25m^2 - 3|3 - 5m| < 30m - 9$$

20.2 Lösung

Level A

Aufgabe 1.

$$|6 + 4x| \leq 14$$

Lösung:

$$-14 \leq 6 + 4x \leq 14$$

$$-14 - 6 \leq 4x \leq 14 - 6$$

$$-20 \leq 4x \leq 8$$

$$-5 \leq x \leq 2$$

Antwort : $x \in [-5; 2]$

Aufgabe 2.

$$|3y - 5| < 4$$

Lösung:

$$3y - 5 < 4$$

$$-1 < 3y - 5 < 4$$

$$-1 + 5 < 3y < 4 + 5$$

$$1 < 3y < 9$$

$$\frac{1}{3} < y < 3$$

$$\text{Antwort: } y \in (\frac{1}{3}; 3)$$

Aufgabe 3.

$$|z - 8| \geq 3$$

Lösung:

$$\begin{cases} z - 8 \geq 3, \\ z - 8 \leq -3; \end{cases}$$

$$z \geq 3 + 8,$$

$$z \leq 3 + 8;$$

$$z \geq 11,$$

$$z \leq 5.$$

$$\text{Antwort: } z \in (-\infty; 11] \cup [5; +\infty)$$

Aufgabe 4.

$$|f + 4| > 4$$

Lösung:

$$f + 4 > 4,$$

$$f + 4 < -4;$$

$$f > 4 - 4,$$

$$f < -4 - 4;$$

$$f > 0,$$

$$f < -8;$$

$$\text{Antwort: } f \in (-\infty; 8) \cup (0; +\infty)$$

Aufgabe 5.

$$|2n - 1| < 9$$

Lösung:

$$-9 < 2n - 1 < 9$$

$$-9 + 1 < 2n < 9 + 1$$

$$-8 < 2n < 10$$

$$-4 < n < 5$$

$$\text{Antwort: } n \in (-4; 5)$$

Level B

Aufgabe 1.

$$2 \leq |2x - 4| \leq 10$$

Lösung:

$$\begin{cases} 2x - 4 \geq 2, \\ 2x - 4 \leq -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4 \geq 2, & \begin{cases} 2x \geq 2 + 4, & \begin{cases} x \geq 3, & \begin{cases} x \in [3; +\infty), \end{cases} \end{cases} \\ 2x - 4 \leq -2; & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq -2 + 4; & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1; & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1]; & \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$

$$\begin{cases} 2x - 4 \geq -10, & \begin{cases} 2x \geq -10 + 4, & \begin{cases} 2x \geq -6, & \begin{cases} x \geq -3, \end{cases} \end{cases} \\ 2x - 4 \leq 10; & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 10 + 4; & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 14; & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7; & \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3; 7]$$

$$\begin{cases} 2x - 4 \geq 2, & \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty), \end{cases} \\ 2x - 4 \leq 10; & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 7]; & \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 1] \cup [3; 7].$$

$$\text{Antwort: } x \in [-3; 1] \cup [3; 7]$$

Aufgabe 2.

$$|y + 1| \leq |y - 2|$$

Lösung:

$$(y + 1)^2 \leq (y - 2)^2$$

$$y^2 + 2y + 1 \leq y^2 - 4y + 4$$

$$y^2 - y^2 + 2y + 4y \leq 4 - 1$$

$$6y \leq 3$$

$$y \leq 0,5$$

$$\text{Antwort: } y \in (-\infty; 0,5]$$

Aufgabe 3.

$$|2m + 1| \geq 2m^2 + 1$$

Lösung:

$$\begin{cases} 2m + 1 \geq 2m^2 + 1, \\ 2m + 1 \geq -2m^2 + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2m^2 + 1 - 1 \geq 0, \\ 2m + 2m^2 + 1 + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 + 2m \geq 0, \\ 2m^2 + 2m + 2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - m \leq 0, \\ m^2 + m + 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) \leq 0, \\ m_1 + m_2 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \text{netkorney}, \\ m = 0, \\ m = 1. \end{cases}$$

$$\text{Antwort: } m \in (-\infty; 1]$$

Aufgabe 4.

$$|5a + 3| < |2a - 1|$$

Lösung:

$$(5a + 3)^2 < (2a - 1)^2$$

$$25a^2 + 30a + 9 < 4a^2 - 4a + 1$$

$$25a^2 - 4a^2 + 30a + 4a + 9 - 1 < 0$$

$$21a^2 + 34a + 8 < 0$$

$$21a^2 + 34a + 8 = 0$$

$$D = 34^2 - 4 * 21 * 8 = 484 = 22^2$$

$$a_1 = \frac{-34 - 22}{2 * 21} = \frac{-56}{42} = -\frac{8}{7}$$

$$a_2 = \frac{-34 + 22}{2 * 21} = \frac{-12}{42} = -\frac{2}{7}$$

$$\text{Antwort: } a \in (-\frac{8}{7}; -\frac{2}{7})$$

Aufgabe 5.

$$|y^2 + 4y - 5| \leq y^2 + 4y - 5$$

Lösung:

$$\begin{cases} y^2 + 4y - 5 \leq y^2 + 4y - 5, \\ y^2 + 4y - 5 \leq -y^2 - 4y + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y^2 + 4y - 4y - 5 + 5 \leq 0, \\ y^2 + y^2 + 4y + 4y - 5 - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ 2y^2 + 8y - 10 \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{Antwort: } y \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$$

Level C

Aufgabe 1.

$$|x^2 + 4x| + |-x^2 + 9| \geq (4x + 9)$$

Lösung:

$$(x^2 + 4x)(-x^2 + 9) \geq 0$$

$$x(x + 4)(3 - x)(x + 3)$$

$$x = 0,$$

$$x = -4,$$

$$x = 3,$$

$$x = -3.$$

$$\text{Antwort: } x \in [-4; -3] \cup [0; 3]$$

Aufgabe 2.

$$\left| \frac{y^2 - 3y - 1}{y^2 + y + 1} \right| < 3$$

Lösung:

$$\begin{cases} \frac{y^2-3y-1}{y^2+y+1} < 3, \\ \frac{y^2-3y-1}{y^2+y+1} < -3; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2-3y-1 < 3(y^2+y+1), \\ y^2-3y-1 < -3(y^2+y+1); \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2-3y-1 < 3y^2+3y+3, \\ y^2-3y-1 < -3y^2-3y-3; \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-3y^2-3y-1-3 < 0, \\ y^2+3y^2-3y+3y-1+3 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} -2y^2-6y-4 < 0, \\ 4y^2+2 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y^2+3y+2 > 0, \\ 2y^2+1 < 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y_1+y_2 > -1; \\ y_1 \cdot y_2 > 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 > -1, \\ y_2 > -2. \end{cases}$$

Antwort: $y \in (-2; +\infty)$

Aufgabe 3.

$$\left| \frac{z+3}{z-27} \right| < 1$$

Lösung:

$$\begin{cases} z+3 < z-27, \\ z+3 < -z+27; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} z-z < -3-27, \\ z+z < 27-3; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 < 30, \\ 2z < 24; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 < 30, \\ z < 12. \end{cases}$$

Antwort: $z \in (-\infty; 12)$

Aufgabe 4.

$$((a+1)^{-1} - (a+6)^{-1})^2 \leq \frac{|a^2-10a|}{(a^2+7a+6)^2}$$

Lösung:

$$\begin{cases} \frac{|a^2-10a|-25}{(a^2+7a+6)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ a \neq 6, \\ a \neq -1; \Leftrightarrow \\ |a^2-10a| \geq 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-10a-25 \geq 0, \\ a^2-10a+25 \leq 0; \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} a \geq 5+5\sqrt{2}, \\ a \leq 5-5\sqrt{2}, \\ a = 5. \end{cases}$$

Antwort: $a \in (-\infty; -6) \cup (-6; 5-5\sqrt{2}) \cup \{5\} \cup [5+5\sqrt{2}; +\infty)$

Aufgabe 5.

$$25m^2 - 3|3-5m| < 30m - 9$$

Lösung:

$$25m^2 - 30m + 9 - 3|3-5m| < 0$$

$$(5m-3)^2 - 3|3-5m| < 0$$

$$t = |3-5m|$$

$$t^2 - 3t < 0$$

$$0 < t < 3$$

$$0 < |5m-3| < 3$$

$$0 < m < \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} < m < \frac{6}{5}$$

Antwort: $m \in (0; \frac{3}{5}) \cup (\frac{6}{5}; \frac{9}{5})$

21 Lineare Funktionen

21.1 Übungen

Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Aufgaben 1-10: Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 1.

$$y = -3x + 7$$