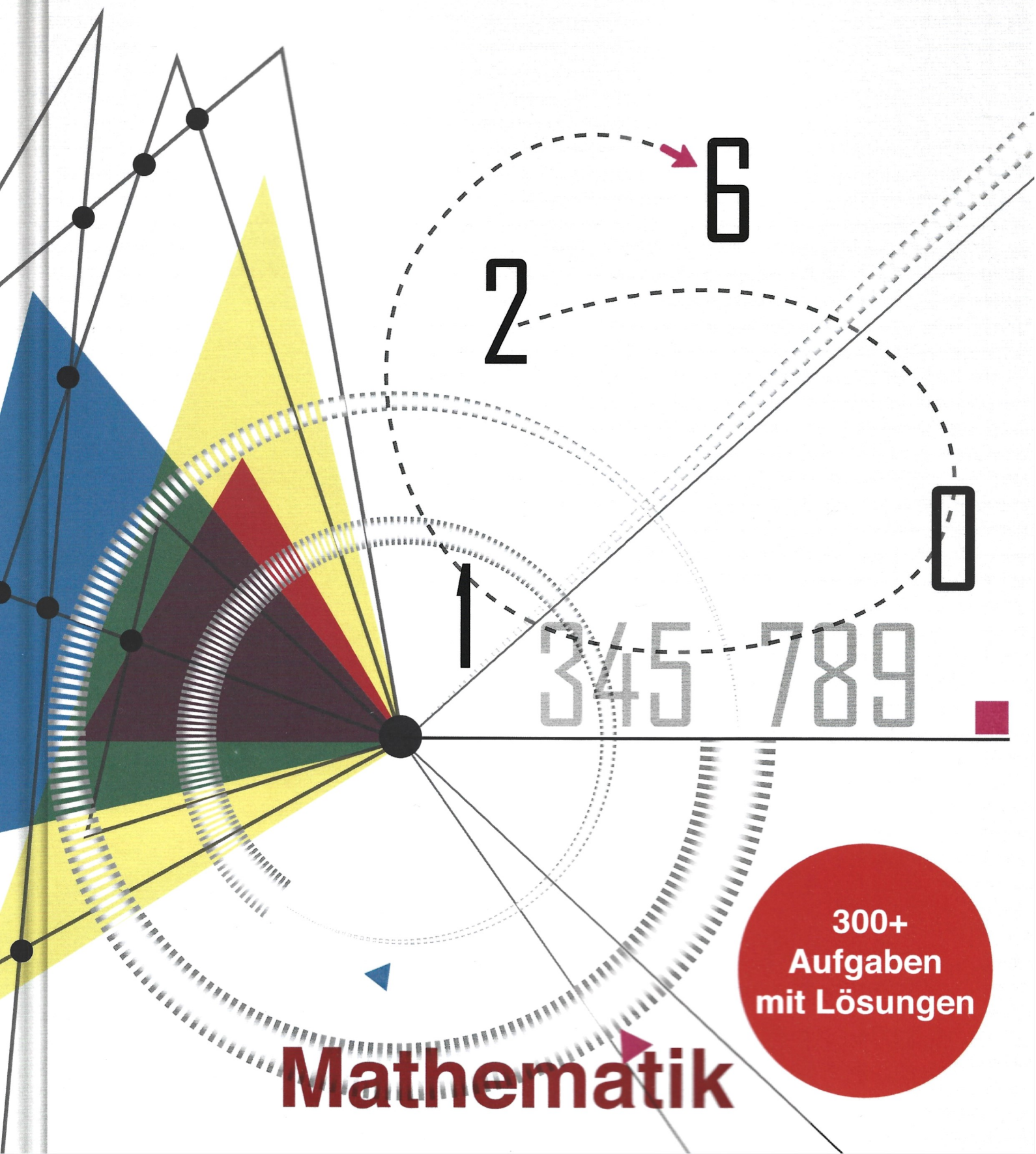


# Studienkolleg

Vorbereitung für Aufnahmetest



300+  
Aufgaben  
mit Lösungen

# Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Rechnen mit Termen &amp; Faktorisieren (Ausklammern)</b>	<b>4</b>
1.1 Übungen . . . . .	4
<b>2 Binomische Formeln</b>	<b>5</b>
2.1 Übungen . . . . .	5
2.2 Lösung . . . . .	6
<b>3 Bruchrechnung</b>	<b>9</b>
3.1 Übungen . . . . .	9
3.2 Lösung . . . . .	11
<b>4 Potenzen</b>	<b>13</b>
4.1 Übungen . . . . .	13
4.2 Lösung . . . . .	15
<b>5 Wurzelrechnung</b>	<b>17</b>
5.1 Übungen . . . . .	17
5.2 Lösung . . . . .	19
<b>6 Logarithmen</b>	<b>22</b>
6.1 Übungen . . . . .	22
6.2 Lösung . . . . .	23
<b>7 Mengenlehre</b>	<b>26</b>
7.1 Übungen . . . . .	26
7.2 Lösung . . . . .	28
<b>8 Zahlenmengen</b>	<b>30</b>
8.1 Übungen . . . . .	30

8.2 Lösung . . . . .	31
<b>9 Lineare Gleichungen</b>	<b>33</b>
9.1 Übungen . . . . .	33
9.2 Lösung . . . . .	34
<b>10 Betragsgleichungen</b>	<b>40</b>
10.1 Übungen . . . . .	40
10.2 Lösung . . . . .	41
<b>11 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>47</b>
11.1 Übungen . . . . .	47
11.2 Lösung . . . . .	49
<b>12 Textaufgaben</b>	<b>56</b>
12.1 Übungen . . . . .	56
12.2 Lösung . . . . .	57
<b>13 Quadratische Gleichungen</b>	<b>59</b>
13.1 Übungen . . . . .	59
13.2 Lösung . . . . .	60
<b>14 Polynomgleichungen</b>	<b>67</b>
<b>15 Exponentialgleichungen</b>	<b>67</b>
15.1 Übungen . . . . .	67
15.2 Lösung . . . . .	68
<b>16 Logarithmusgleichungen</b>	<b>76</b>
16.1 Übungen . . . . .	76
16.2 Lösung . . . . .	77

<b>17 Ungleichungen</b>	<b>85</b>
17.1 Übungen . . . . .	85
17.2 Lösung . . . . .	86
<b>18 Betragsungleichungen</b>	<b>91</b>
18.1 Übungen . . . . .	91
18.2 Lösung . . . . .	92
<b>19 Lineare Funktionen</b>	<b>97</b>
19.1 Übungen . . . . .	97
19.2 Lösung . . . . .	99
<b>20 Quadratische Funktionen</b>	<b>103</b>
20.1 Übungen . . . . .	103
20.2 Lösung . . . . .	104
<b>21 Potenzfunktionen</b>	<b>106</b>
21.1 Übungen . . . . .	106
21.2 Lösung . . . . .	107

# 1 Rechnen mit Termen & Faktorisieren (Ausklammern)

## 1.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

**Aufgabe 1.**

$$6ab + 35a + 73b = 6b + 5ab + 7a$$

**Aufgabe 2.**

$$b(3c + 4ac) = 15abc - 44bc$$

**Aufgabe 3.**

$$37a + 34ab - 3 = 47a - 15$$

**Aufgabe 4.**

$$15a(24k - 21n) = 18ak + 2a + 4an$$

**Aufgabe 5.**

$$5n(18bc + 4k) = 47kn - 4n$$

**Aufgabe 6.**

$$(x - y)(5b + c) + (x - y)(6b - c)$$

**Aufgabe 7.**

$$(f + 5a)(c - 4) + (6a - 3f)(-c)$$

**Aufgabe 8.**

$$(a + 3c) + 47(3c + a)(67.4c)$$

**Aufgabe 9.**

$$2.3(c + 2ab + ac) = 5ab - 1.3c$$

**Aufgabe 10.**

$$47k + 44r - (k + 5.3r + kr)$$

**Aufgabe 11.**

$$3k(k + \frac{1}{3}k + 47 = 45k(\frac{1}{5}c + 3)$$

**Aufgabe 12.**

$$\frac{1}{2}b(2b + 4a) = 5.5(2b + ab)$$

**Aufgabe 13.**

$$(f + n)(5.7c - 4.3c^2) - (f + n)(5.7c - 4.3c^2)$$

**Aufgabe 14.**

$$2.8x(4, 7y + 7.3x - 5) = -1.3x$$

**Aufgabe 15.**

$$7.5(f + u) + 47uf = 3(u + f)$$

## 2 Binomische Formeln

### 2.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

**Level A**

**Aufgabe 1.**

$$(1 + 2x^2)^2$$

**Aufgabe 2.**

$$(4b + 6a)^2$$

**Aufgabe 3.**

$$(7f + 8k)(8k - 7f)$$

**Aufgabe 4.**

$$144 - 9c^2$$

**Aufgabe 5.**

$$36b^2 + 1 + 12b$$

## Level B

### Aufgabe 1.

$$(k^2y + ky^2)(k^2y - ky^2)$$

### Aufgabe 2.

$$\left(\frac{5}{7}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2$$

### Aufgabe 3.

$$(4a^2 - \frac{1}{2}b^3)^2$$

### Aufgabe 4.

$$(6x^2 + 0, 1)^2$$

### Aufgabe 5.

$$(8f^4 + 7m)(7m - 8f^4)$$

## Level C

### Aufgabe 1.

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2b - 7ab^2)$$

### Aufgabe 2.

$$\left(a^7 + \frac{7}{8}ax^4\right)^2$$

### Aufgabe 3.

$$\left(\frac{3}{4}m^3f^4 - m^5\right)^2$$

### Aufgabe 4.

$$\left(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^5\right)^2$$

### Aufgabe 5.

$$\left(\frac{1}{4}x^{n-2}y^4 + x^{n+2}\right)^2$$

## 2.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

## Level A

### Aufgabe 1.

$$(1 + 2x^2)^2$$

*Lösung:*

$$(1 + 2x^2)^2 = 1 + 4x^2 + 4x^4$$

### Aufgabe 2.

$$(4b + 6a)^2$$

*Lösung:*

$$(4b + 6a)^2 = 16b^2 + 48ab + 36a^2$$

### Aufgabe 3.

$$(7f + 8k)(8k - 7f)$$

*Lösung:*

$$(8k + 7f)(8k - 7f) = 64k^2 - 49f^2$$

### Aufgabe 4.

$$144 - 9c^2$$

*Lösung:*

$$144 - 9c^2 = (12 + 3c)(12 - 3c)$$

### Aufgabe 5.

$$36b^2 + 1 + 12b$$

*Lösung:*

$$36b^2 + 1 + 12b = (6b + 1)^2$$

## Level B

### Aufgabe 1.

$$(k^2y + ky^2)(k^2y - ky^2)$$

*Lösung:*

$$(k^2y + ky^2)(k^2y - ky^2) = k^4y^2 - k^2y^4$$

**Aufgabe 2.**

$$\left(\frac{5}{7}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{5}{7}mn + \frac{2}{3}m^2\right)^2 = \frac{25}{49}m^2n^2 + \frac{20}{21}m^3n + \frac{4}{9}m^4$$

**Aufgabe 3.**

$$\left(4a^2 - \frac{1}{2}b^3\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(4a^2 - \frac{1}{2}b^3\right)^2 = 16a^4 - 4a^2b^3 + \frac{1}{4}b^6$$

**Aufgabe 4.**

$$(6x^2 + 0, 1)^2$$

*Lösung:*

$$(6x^2 + 0, 1)^2 = 36x^4 + 1, 2x^2 + 0, 01$$

**Aufgabe 5.**

$$(8f^4 + 7m)(7m - 8f^4)$$

*Lösung:*

$$(7m + 8f^4)(7m - 8f^4) = 49m^2 - 64f^8$$

**Level C****Aufgabe 1.**

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2b - 7ab^2)$$

*Lösung:*

$$(4a^2b + 7ab^2)(4a^2b - 7ab^2) = 16a^4b^2 - 49a^2b^4$$

**Aufgabe 2.**

$$\left(a^7 + \frac{7}{8}ax^4\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(a^7 + \frac{7}{8}ax^4\right)^2 = a^{14} + \frac{7}{4}a^8x^4 + \frac{49}{64}a^2x^8$$

**Aufgabe 3.**

$$\left(\frac{3}{4}m^3f^4 - m^5\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{3}{4}m^3f^4 - m^5\right)^2 = \frac{9}{16}m^6f^8 - \frac{3}{2}m^8f^4 + m^{10}$$

**Aufgabe 4.**

$$\left(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^5\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(b^{n+1} - \frac{1}{3}b^{n-1}a^5\right)^2 = b^{2n+2} - \frac{2}{3}b^{2n}a^5 + \frac{1}{9}b^{2n-2}a^{10}$$

**Aufgabe 5.**

$$\left(\frac{1}{4}x^{n-2}y^4 + x^{n+2}\right)^2$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{1}{4}x^{n-2}y^4 + x^{n+2}\right)^2 = \frac{1}{16}x^{2n-4}y^8 + \frac{1}{2}x^{2n}y^4 + x^{2n+4}$$

## 3 Bruchrechnung

### 3.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

**Aufgabe 1.**

$$\left(\frac{4x}{x-3} + \frac{12}{3-x}\right) * \frac{x^2}{4}$$

**Aufgabe 2.**

$$\left(\frac{y^2}{y-c} + \frac{c^2}{c-y}\right) * \frac{y^2}{y+c}$$

**Aufgabe 3.**

$$\frac{2m-2n}{n} * \frac{3n^2}{m^2-n^2}$$

**Aufgabe 4.**

$$\frac{u^2+uv}{5u^2} * \frac{u}{3u+3v}$$

### Aufgabe 5.

$$\frac{3k-7}{9} - \frac{4k-1}{6}$$

### Level B

#### Aufgabe 1.

$$\left(\frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{x^2-xy}\right) * \frac{xy}{y-x}$$

#### Aufgabe 2.

$$\left(\frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b}$$

#### Aufgabe 3.

$$\frac{(x+3)^2}{2x-4} * \frac{x^2-4}{3x+9}$$

#### Aufgabe 4.

$$\frac{16-8a+a^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8}$$

#### Aufgabe 5.

$$\frac{4-m^2}{10+5m} * \frac{25}{m^2-4m+4}$$

### Level C

#### Aufgabe 1.

$$\left(f - \frac{6f-4}{f+2}\right) * \frac{f+2}{f^2-2f}$$

#### Aufgabe 2.

$$\left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{c^2-3c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3}$$

#### Aufgabe 3.

$$\left(\frac{2}{x-2} + \frac{3x-21}{x^2+x-6} + \frac{2x}{x+3}\right) * \frac{x}{2x-5}$$

#### Aufgabe 4.

$$\left(\frac{y}{y^2-2y+1} - \frac{y+2}{y^2+y-2}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2}$$

#### Aufgabe 5.

$$\left(\frac{r+2}{r^2-r-6} - \frac{r}{r^2-6r+9}\right) * (2r-6)^2$$

## 3.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{4x}{x-3} + \frac{12}{3-x}\right) * \frac{x^2}{4}$$

Lösung:

$$\left(\frac{4x}{x-3} + \frac{12}{3-x}\right) * \frac{x^2}{4} = \left(\frac{4x}{x-3} - \frac{12}{x-3}\right) * \frac{x^2}{4} = \frac{4x-12}{x-3} * \frac{x^2}{4} = \frac{4(x-3)}{(x-3)} * \frac{x^2}{4} = x^2$$

Aufgabe 2.

$$\left(\frac{y^2}{y-c} + \frac{c^2}{c-y}\right) * \frac{y^2}{y+c}$$

Lösung:

$$\left(\frac{y^2}{y-c} + \frac{c^2}{c-y}\right) * \frac{y^2}{y+c} = \frac{y^2-c^2}{y-c} * \frac{y^2}{y+c} = \frac{(y-c)(y+c)}{y-c} * \frac{y^2}{y+c} = y^2$$

Aufgabe 3.

$$\frac{2m-2n}{n} * \frac{3n^2}{m^2-n^2}$$

Lösung:

$$\frac{2(m-n)}{n} * \frac{3n^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{2}{1} * \frac{3n}{(m+n)} = \frac{6n}{m+n}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{u^2+uv}{5u^2} * \frac{u}{3u+3v}$$

Lösung:

$$\frac{u(u+v)}{5u*3(u+v)} = \frac{1}{15}$$

Aufgabe 5.

$$\frac{3k-7}{9} - \frac{4k-1}{6}$$

Lösung:

$$\frac{2(3k-7)-3(4k-1)}{18} = \frac{6k-14-12k+3}{18} = \frac{-6k-11}{18}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\left(\frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{x^2-xy}\right) * \frac{xy}{y-x}$$

*Lösung:*

$$\frac{x-y}{x^2-xy} * \frac{xy}{y-x} = \frac{x-y}{x(x-y)} * \frac{xy}{y-x} = \frac{y}{y-x}$$

### Aufgabe 2.

$$\left(\frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b}$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)} + \frac{b}{2(b-a)}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} &= \left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{2(a-b)}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} = \left(\frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)}\right) * \frac{a^2-b^2}{2b} = \\ \frac{ab-b^2}{4b} * \frac{b(a-b)}{4b} &= \frac{a-b}{4} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.

$$\frac{(x+3)^2}{2x-4} * \frac{x^2-4}{3x+9}$$

*Lösung:*

$$\frac{(x+3)^2}{2(x-2)} * \frac{x^2-2^2}{3(x+3)} = \frac{(x+3)}{2(x-2)} * \frac{(x-2)(x+2)}{3} = \frac{(x+3)(x+2)}{6} = \frac{x^2+2x+3x+6}{6} = \frac{x^2+5x+6}{6}$$

### Aufgabe 4.

$$\frac{16-8a+a^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8}$$

*Lösung:*

$$\frac{16-8a+a^2}{32} : \frac{a^2-16}{2a+8} = \frac{(4-a)^2}{32} * \frac{2(a+4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{-(4-a)^2}{16(4-a)} = -\frac{4-a}{16}$$

### Aufgabe 5.

$$\frac{4-m^2}{10+5m} * \frac{25}{m^2-4m+4}$$

*Lösung:*

$$\frac{2^2-m^2}{5(2+m)} * \frac{25}{(m-2)^2} = \frac{(2-m)(2+m)}{(2+m)} * \frac{5}{(m-2)^2} = -\frac{(m-2)*5}{(m-2)^2} = -\frac{5}{m-2} = \frac{5}{2-m}$$

## Level C

### Aufgabe 1.

$$\left(f - \frac{6f-4}{f+2}\right) * \frac{f+2}{f^2-2f}$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{f(f+2)}{f+2} - \frac{6f-4}{f+2}\right) * \frac{f+2}{f(f-2)} = \left(\frac{f^2+2f-6f+4}{f+2}\right) * \frac{f+2}{f(f-2)} = \frac{f^2-4f+4}{f+2} * \frac{f+2}{f(f-2)} = \frac{(f-2)^2}{f(f-2)} = \frac{f-2}{f}$$

### Aufgabe 2.

$$\left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{c^2-3c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3}$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{c^2-4c+c-4} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3} &= \left(\frac{3}{c-4} + \frac{4c-6}{(c+1)(c-4)} + \frac{2c}{c+1}\right) * \frac{c}{2c-3} = \frac{3(c+1)+4c-6+2c(c-4)}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} = \\ \frac{3c+3+4c-6+2c^2-8c}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} &= \frac{2c^2-c-3}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} = \frac{(c+1)(2c-3)}{(c+1)(c-4)} * \frac{c}{2c-3} = \frac{c}{c-4} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.

$$\left(\frac{2}{x-2} + \frac{3x-21}{x^2+x-6} + \frac{2x}{x+3}\right) * \frac{x}{2x-5}$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{3x-21}{(x+3)(x-2)} + \frac{2x}{x+3}\right) * \frac{x}{2x-5} &= \frac{2(x+3)+3x-21+2x(x-2)}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \frac{2x+6+3x-21+2x^2-4x}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \\ \frac{2x^2+x-15}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} &= \frac{(x+3)(2x-5)}{(x+3)(x-2)} * \frac{x}{2x-5} = \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

### Aufgabe 4.

$$\left(\frac{y}{y^2-2y+1} - \frac{y+2}{y^2+y-2}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2}$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{y}{(y-1)^2} - \frac{y+2}{(y+2)(y-1)}\right) : \frac{1}{(2y-2)^2} = \frac{y-(y-1)}{(y-1)^2} * \frac{4(y-1)^2}{1} = 4(y-y+1) = 4$$

### Aufgabe 5.

$$\left(\frac{r+2}{r^2-r-6} - \frac{r}{r^2-6r+9}\right) * (2r-6)^2$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{r+2}{(r-3)(r+2)} - \frac{r}{(r-3)^2}\right) * (2r-6)^2 = \frac{r-3-r}{(r-3)^2} * \frac{4(r-3)^2}{1} = 4 * (-3) = -12$$

## 4 Potenzen

### 4.1 Übungen

**Vereinfachen/Berechnen Sie:**

Level A

Aufgabe 1.

$$a^{-3} * a^4 : (-a)^{-5}$$

### Aufgabe 2.

$$m^{-3,5} : (m^4)^{3,5} * m^{\frac{1}{5}}$$

### Aufgabe 3.

$$\frac{f^5 * f^{-10}}{f^{-13}}$$

### Aufgabe 4.

$$(c^{0,8})^8 * (c^{0,5})^{-8} : (c^{-1,3})^{-2}$$

### Aufgabe 5.

$$\frac{(b^3)^{4,3} * b^5}{(b^{3,2})^5}$$

### Level B

#### Aufgabe 1.

$$(b^{-5} + b^{-4} + b^{-3}) : b^{-3} - (b^{-1} - 1)^2$$

#### Aufgabe 2.

$$\frac{y^{-8} + y^{-6} + y^{-4}}{y^4 + y^6 + y^8}$$

#### Aufgabe 3.

$$\frac{n^{-2} - m^{-2}}{n^{-1} + m^{-1}} : \frac{n^{-1} * m^{-1}}{(m-n)^{-1}}$$

#### Aufgabe 4.

$$\frac{f^{-2} + f^{-1}u^{-1} + u^{-2}}{f^{-3} - u^{-3}} : \frac{(u-f)^{-1}}{(fu)^{-2}}$$

#### Aufgabe 5.

$$\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^{-9} + a^{-7} + a^{-5}}$$

### Level C

#### Aufgabe 1.

$$\frac{x^3 y^{-1}}{xy^{-1} + x^{-1}y} * \left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$$

#### Aufgabe 2.

$$\frac{(mn - 3 - m^{-3}n)^{-1} * (m^{-2} + n^{-2})}{(m^{-2} - n^{-2})^{-1}}$$

#### Aufgabe 3.

$$(2c^{-2} + 3k^{-3})\left(\frac{c^{-2}}{2^{-1}} - \frac{1}{3^{-1}k^3}\right)\left(\frac{4}{c^4} + \frac{k^{-6}}{3^{-2}}\right)$$

#### Aufgabe 4.

$$\frac{(a^3b^{-1})^{\frac{1}{2}} - (a^{-1}b^3)^{\frac{1}{2}}}{(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} - (a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$$

#### Aufgabe 5.

$$\frac{u^{\frac{3}{4}}v^{-\frac{1}{4}} - u^{-\frac{1}{4}}v^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}v^{-\frac{1}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}v^{\frac{1}{4}}}$$

## 4.2 Lösung

Vereinfachen/Berechnen Sie:

Level A

#### Aufgabe 1.

$$a^{-3} * a^4 : (-a)^{-5}$$

*Lösung:*

$$a^{-3} * a^4 : (-a)^{-5} = a^1 * (-a^5)$$

#### Aufgabe 2.

$$m^{-3,5} : (m^4)^{3,5} * m^{\frac{1}{5}}$$

*Lösung:*

$$m^{-3,5} : (m^4)^{3,5} * m^{\frac{1}{5}} = m^{-3,5-14+\frac{1}{5}} = m^{-17,5+\frac{1}{5}} = m^{-17,5+0,2} = m^{-17,3}$$

#### Aufgabe 3.

$$\frac{f^5 * f^{-10}}{f^{-13}}$$

*Lösung:*

$$\frac{f^5 * f^{-10}}{f^{-13}} = f^{5+(-10)-(-13)} = f^{-5+13} = f^8$$

#### Aufgabe 4.

$$(c^{0,8})^8 * (c^{0,5})^{-8} : (c^{-1,3})^{-2}$$

*Lösung:*

$$c^{0,8*8} * c^{0,5*(-8)} : c^{-1,3*(-2)} = c^{6,4} * c^{-4} : c^{2,6} = c^{-0,2}$$

#### Aufgabe 5.

$$\frac{(b^3)^{4,3} * b^5}{(b^{3,2})^5}$$

*Lösung:*

$$b^{12,9} * b^5 : b^{16} = b^{12,9+5-16} = b^{1,9}$$

## Level B

### Aufgabe 1.

$$(b^{-5} + b^{-4} + b^{-3}) : b^{-3} - (b^{-1} - 1)^2$$

*Lösung:*

$$\left(\frac{b^{-5}}{b^{-3}} + \frac{b^{-4}}{b^{-3}} + \frac{b^{-3}}{b^{-3}}\right) - ((b^{-1})^2 - 2b^{-1} + 1^2) = (b^{-2} + b^{-1} + 1) - (b^{-2} - 2b^{-1} + 1) = b^{-2} + b^{-1} + 1 - b^{-2} + 2b^{-1} - 1 = 3b^{-1} = \frac{3}{b}$$

### Aufgabe 2.

$$\frac{y^{-8} + y^{-6} + y^{-4}}{y^4 + y^6 + y^8}$$

*Lösung:*

$$\frac{\frac{1}{y^8} + \frac{1}{y^6} + \frac{1}{y^4}}{y^4 + y^6 + y^8} = \frac{\frac{1+y^2+y^4}{y^8}}{y^4(1+y^2+y^4)} = \frac{1}{y^{12}} = y^{-12}$$

### Aufgabe 3.

$$\frac{n^{-2} - m^{-2}}{n^{-1} + m^{-1}} : \frac{n^{-1} * m^{-1}}{(m-n)^{-1}}$$

*Lösung:*

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} * \frac{\frac{1}{m-n}}{\frac{1}{n} * \frac{1}{m}} = \frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}{(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})} * \frac{\frac{1}{m-n}}{\frac{1}{nm}} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) * \frac{nm}{m-n} = \frac{(m-n)}{mn} * \frac{(nm)}{(m-n)} = 1$$

### Aufgabe 4.

$$\frac{f^{-2} + f^{-1}u^{-1} + u^{-2}}{f^{-3} - u^{-3}} : \frac{(u-f)^{-1}}{(fu)^{-2}}$$

*Lösung:*

$$\frac{(f^{-2} + f^{-1}u^{-1} + u^{-2})}{(f^{-1} - u^{-1})(f^{-2} + f^{-1}u^{-1} + u^{-2})} * \frac{(fu)^{-2}}{(u-f)^{-1}} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{u} * \frac{u-f}{fu^2} = \frac{1}{fu} * \frac{u-f}{fu^2} = \frac{fu}{u-f} * \frac{u-f}{fu^2} = \frac{1}{fu}$$

### Aufgabe 5.

$$\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^{-9} + a^{-7} + a^{-5}}$$

*Lösung:*

$$\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^{-9} + a^{-7} + a^{-5}} = \frac{\frac{a^5 + a^7 + a^9}{a^9}}{\frac{1}{a^9} + \frac{1}{a^7} + \frac{1}{a^5}} = \frac{a^5 + a^7 + a^9}{\frac{1+a^2+a^4}{a^9}} = \frac{a^5(1+a^2+a^4)}{(1+a^2+a^4)} * a^9 = a^5 * a^9 = a^{14}$$

## Level C

### Aufgabe 1.

$$\frac{x^3 y^{-1}}{xy^{-1} + x^{-1}y} * \left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} * \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{x^4 - y^4}{yx}}{\frac{x^2 + y^2}{yx}} * \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{(x^4 - y^4) * yx}{yx(x^2 + y^2)} * \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} * \frac{xy}{(x^2 - y^2)} = xy$$

### Aufgabe 2.

$$\frac{(mn - 3 - m^{-3}n)^{-1} * (m^{-2} + n^{-2})}{(m^{-2} - n^{-2})^{-1}}$$

Lösung:

$$\frac{\left(\frac{m}{n^3} - \frac{n}{m^3}\right)^{-1} * \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)^{-1}} = \frac{(m^{-2} - n^{-2})(m^{-2} + n^{-2})}{\frac{m^4 - n^4}{n^3 m^3}} = \frac{m^{-4} - n^{-4}}{m^4 - n^4} * n^3 m^3 = n^3 m^3$$

### Aufgabe 3.

$$(2c^{-2} + 3k^{-3})\left(\frac{c^{-2}}{2^{-1}} - \frac{1}{3^{-1}k^3}\right)\left(\frac{4}{c^4} + \frac{k^{-6}}{3^{-2}}\right)$$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{c^2} + \frac{3}{k^3}\right) * \left(\frac{2}{c^2} - \frac{3}{k^3}\right) * \left(\frac{4}{c^4} + \frac{3^2}{k^6}\right) = \left(\frac{4}{c^4} - \frac{9}{k^6}\right)\left(\frac{4}{c^4} + \frac{9}{k^6}\right)$$

### Aufgabe 4.

$$\frac{(a^3 b^{-1})^{\frac{1}{2}} - (a^{-1} b^3)^{\frac{1}{2}}}{(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} - (a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung:

$$\frac{\left(\frac{a^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)} = a + b$$

### Aufgabe 5.

$$\frac{u^{\frac{3}{4}} v^{-\frac{1}{4}} - u^{-\frac{1}{4}} v^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{4}} v^{-\frac{1}{4}} + u^{-\frac{1}{4}} v^{\frac{1}{4}}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{u^{\frac{3}{4}}}{v^{\frac{1}{4}}} - \frac{v^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}}}{\frac{u^{\frac{1}{4}}}{v^{\frac{1}{4}}} + \frac{v^{\frac{1}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}}} = \frac{\frac{u - v}{u^{\frac{1}{4}} v^{\frac{1}{4}}}}{\frac{u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{4}} v^{\frac{1}{4}}}} = \frac{u - v}{u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}} = \frac{(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}})(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}})}{(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}})} = u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}$$

## 5 Wurzelrechnung

### 5.1 Übungen

Vereinfachen/Berechnen Sie:

## Level A

### Aufgabe 1.

$$5\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

### Aufgabe 2.

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + \sqrt{12})$$

### Aufgabe 3.

$$(\sqrt{6} - 3)^2$$

### Aufgabe 4.

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

### Aufgabe 5.

$$(\sqrt{5 + \sqrt{7}})^2 - 2\sqrt{5 + \sqrt{7}} * \sqrt{5 - \sqrt{7}} + (\sqrt{5 - \sqrt{7}})^2$$

## Level B

### Aufgabe 1.

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 * \sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a}}$$

### Aufgabe 2.

$$\frac{b-18}{\sqrt{b}+3\sqrt{2}}$$

### Aufgabe 3.

$$\frac{k-f}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} - \sqrt{f}$$

### Aufgabe 4.

$$\frac{y\sqrt{y}+u\sqrt{u}}{y-\sqrt{yu}+u}$$

### Aufgabe 5.

$$\sqrt{a} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

## Level C

### Aufgabe 1.

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m}$$

### Aufgabe 2.

$$\sqrt{a} : \left( \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{a-b} \right)$$

### Aufgabe 3.

$$\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{5}}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2+\sqrt{5}x} * (\sqrt{x} - \sqrt{5})$$

### Aufgabe 4.

$$\left( \frac{c-\sqrt{c^2-k^2}}{c+\sqrt{c^2-k^2}} - \frac{c+\sqrt{c^2-k^2}}{c-\sqrt{c^2-k^2}} \right) : \frac{4\sqrt{c^4-c^2k^2}}{(5k)^2}$$

### Aufgabe 5.

$$\left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} \right) : \left( \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)$$

## 5.2 Lösung

### Vereinfachen/Berechnen Sie:

#### Level A

#### Aufgabe 1.

$$5\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

*Lösung:*

$$5\sqrt{2} + \sqrt{16 * 2} - \sqrt{9 * 2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

#### Aufgabe 2.

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + \sqrt{12})$$

*Lösung:*

$$\sqrt{3} * (3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} * 5\sqrt{3} = 15$$

#### Aufgabe 3.

$$(\sqrt{6} - 3)^2$$

*Lösung:*

$$(\sqrt{6})^2 - 2 * 3\sqrt{6} + 9 = 6 - 6\sqrt{6} + 9 = 15 - 6\sqrt{6}$$

#### Aufgabe 4.

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

Lösung:

$$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

Aufgabe 5.

$$(\sqrt{5 + \sqrt{7}})^2 - 2\sqrt{5 + \sqrt{7}} * \sqrt{5 - \sqrt{7}} + (\sqrt{5 - \sqrt{7}})^2$$

Lösung:

$$(\sqrt{5 + \sqrt{7}})^2 - 2\sqrt{5 + \sqrt{7}} * \sqrt{5 - \sqrt{7}} + (\sqrt{5 - \sqrt{7}})^2 = 5 + \sqrt{7} - 2\sqrt{18} + 5 - \sqrt{7} = 10 - 2 * 3\sqrt{2} = 10 - 6\sqrt{2}$$

Level B

Aufgabe 1.

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 * \sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a}}$$

Lösung:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 * \sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[5]{a^{3 + \frac{1}{4}}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[5]{a^{\frac{15}{4}}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{15}{4}})^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{9-4}{12}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$$

Aufgabe 2.

$$\frac{b-18}{\sqrt{b+3\sqrt{2}}}$$

Lösung:

$$\frac{b-18}{\sqrt{b+3\sqrt{2}}} = \frac{b-18}{\sqrt{b+\sqrt{18}}} = \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{18})^2}{\sqrt{b+\sqrt{18}}} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{18})(\sqrt{b}+\sqrt{18})}{(\sqrt{b}+\sqrt{18})} = \sqrt{b} - \sqrt{18}$$

Aufgabe 3.

$$\frac{k-f}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} - \sqrt{f}$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{f})^2}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{1} = \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{f})(\sqrt{k}+\sqrt{f})}{\sqrt{k}-\sqrt{f}} - \sqrt{f} = \sqrt{k} + \sqrt{f} - \sqrt{f} = \sqrt{k}$$

Aufgabe 4.

$$\frac{y\sqrt{y+u}\sqrt{u}}{y-\sqrt{yu}+u}$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{y})^3 + (\sqrt{u})^3}{y-\sqrt{yu}+u} = \frac{(\sqrt{y}+\sqrt{u})((\sqrt{y})^2 - \sqrt{yu} + (\sqrt{u})^2)}{y-\sqrt{yu}+u} = \frac{(\sqrt{y}+\sqrt{u})(y-\sqrt{yu}+u)}{(y-\sqrt{yu}+u)} = \sqrt{y} + \sqrt{u}$$

Aufgabe 5.

$$\sqrt{a} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Lösung:

$$\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b}$$

**Level C**

**Aufgabe 1.**

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m}$$

Lösung:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m} = \left(\frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right) * \frac{n-m}{\sqrt{m}} = \left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{m}+\sqrt{n}}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}\right) * \frac{n-m}{\sqrt{m}} =$$

$$\frac{\sqrt{n}}{m-n} * \frac{n-m}{\sqrt{m}} = -\frac{\sqrt{n}}{m-n} * \frac{m-n}{\sqrt{m}} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

**Aufgabe 2.**

$$\sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{a-b}\right)$$

Lösung:

$$\sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}\right) = \sqrt{a} : \left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\sqrt{a}}{a-b}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} * \frac{-\sqrt{a}}{a-b} = \frac{-1}{a-b}$$

**Aufgabe 3.**

$$\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{5}}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2+\sqrt{5}x} * (\sqrt{x} - \sqrt{5})$$

Lösung:

$$\frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{5})^3}{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + \sqrt{5}x} * (\sqrt{x} - \sqrt{5}) = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}x+\sqrt{5})}{(x-\sqrt{5}x+5)} * (\sqrt{x} - \sqrt{5}) = (\sqrt{x} - \sqrt{5}) (\sqrt{x} - \sqrt{5}) =$$

$$\sqrt{5} = x - 5$$

**Aufgabe 4.**

$$\left(\frac{c-\sqrt{c^2-k^2}}{c+\sqrt{c^2-k^2}} - \frac{c+\sqrt{c^2-k^2}}{c-\sqrt{c^2-k^2}}\right) : \frac{4\sqrt{c^4-c^2k^2}}{(5k)^2}$$

Lösung:

$$\frac{(c-\sqrt{c^2-k^2})(c+\sqrt{c^2-k^2}) - (c+\sqrt{c^2-k^2})(c-\sqrt{c^2-k^2})}{(c+\sqrt{c^2-k^2})(c-\sqrt{c^2-k^2})} * \frac{(5k)^2}{4\sqrt{c^4-c^2k^2}} = \frac{c^2-c^2+k^2-c^2+c^2-k^2}{c^2-c^2+k^2} * \frac{(5k)^2}{4\sqrt{c^4-c^2k^2}} =$$

$$\frac{2k^2}{k} * \frac{5k^2}{4\sqrt{c^4-c^2k^2}} = \frac{5k^2}{2\sqrt{c^4-c^2k^2}}$$

**Aufgabe 5.**

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) : \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

Lösung: